**Следствие.** Если область определения $D(A) \subseteq X$ замкнутого линейного оператора $A$ плотна в $B$-пространстве $X$ и $R(A) \subseteq X$, причем как оператор $A$, так и сопряженный ему оператор $A'$ диссипативны, то $A$ порождает некоторую сжимающую полугруппу класса $(C_0)$.

**Доказательство.** Достаточно показать, что $R(I - A) = X$. Но оператор $(I - A)^{-1}$ замкнут, как и оператор $A$, и ограничен, поэтому область $R(I - A)$ образует в пространстве $X$ замкнутое линейное подпространство. Следовательно, если предположить, что $R(I - A) \neq X$, то должен существовать нетривиальный функционал $x' \in X'$, такой, что

$$\langle (x - Ax), x' \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(A).$$

Но это означает, что $x' - A'x' = 0$, что противоречит диссипативности оператора $A'$, поскольку $x' \neq 0$.

**Замечание.** Дальнейшие сведения о диссипативных операторах см. Люмер — Филлипс [1]. См. также Като [6].

## 9. Равностепенно непрерывные группы класса $(C_0)$. Теорема Стоуна

**Определение.** Равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t\}$ класса $(C_0)$ мы назовем *равностепенно непрерывной группой класса* $(C_0)$, если существует равностепенно непрерывная полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ класса $(C_0)$, удовлетворяющая следующему условию. Если определить операторы $S_t$ формулой

$$S_t = \begin{cases} T_t & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ \hat{T}_{(-t)} & \text{при} \quad t \leqslant 0, \end{cases}$$

то семейство $\{S_t, \ -\infty < t < \infty\}$ операторов $S_t$ обладает групповым свойством

$$S_t S_s = S_{t+s} \qquad (-\infty < t, \ s < \infty), \quad S_0 = I. \tag{1}$$

**Теорема.** Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство $X$. Пусть область определения $D(A) \subseteq X$ некоторого линейного оператора $A$ плотна в $X$ и $R(A) \subseteq X$. Тогда $A$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой равностепенно непрерывной группы класса $(C_0)$ операторов $S_t \in L(X, X)$ [1]), удовлетворяющих условию (1),

[1]) Оператор $A$ считается по определению инфинитезимальным производящим оператором группы $\{S_t\}$, если $A$ порождает полугруппу $\{S_t; t \geqslant 0\}$, а оператор $(-A)$ порождает полугруппу $\{S_{(-t)}; t \geqslant 0\}$. — *Прим. перев.*

в том и только в том случае, когда операторы $(I-n^{-1}A)^{-m}$ определены во всем пространстве $X$ при любых значениях $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ и $m=1, 2, \ldots$ и равностепенно непрерывны относительно указанных значений индексов $n$ и $m$.

**Доказательство.** *Необходимость.* Положим $T_t=S_t$ при $t\geqslant 0$ и $\hat{T}_t=S_{-t}$ для значений $t\geqslant 0$. Обозначим через $A$ и $\hat{A}$ соответственно инфинитезимальные производящие операторы полугрупп $\{T_t\}$ и $\{\hat{T}_t\}$. Мы должны показать, что $\hat{A}=-A$. Допустим, что $x\in D(\hat{A})$; тогда, полагая $x_h=h^{-1}(\hat{T}_h-I)x$ и используя равностепенную непрерывность $T_h$, мы для любой непрерывной на $X$ полунормы $p$ найдем такую непрерывную полунорму $q$, что одновременно для всех $h\geqslant 0$ и любых $x\in D(A)$ будет выполняться неравенство

$$p(T_hx_h-\hat{A}x)\leqslant p(T_hx_h-T_h\hat{A}x)+p((T_h-I)\hat{A}x)\leqslant$$
$$\leqslant q(x_h-\hat{A}x)+p((T_h-I)\hat{A}x).$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{h\downarrow 0} T_hx_h=\hat{A}x$, т. е. условие $x\in D(\hat{A})$ влечет за собой равенство $\hat{A}x=\lim\limits_{h\downarrow 0} T_h\left(h^{-1}(\hat{T}_h-I)\right)x=\lim\limits_{h\downarrow 0} h^{-1}(I-T_h)x=-Ax$. Следовательно, оператор $-A$ представляет собой расширение оператора $\hat{A}$. Применяя аналогичное построение, можно показать, что $\hat{A}$ служит расширением оператора $A$. Поэтому $\hat{A}=-A$.

*Достаточность.* Допустим, что оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы. Для значений $t\geqslant 0$ определим операторы $T_t$ и $\hat{T}_t$ с помощью следующих соотношений:

$$T_tx=\lim_{n\to\infty} T_t^{(n)}x\equiv\lim_{n\to\infty}\exp\left(tA(I-n^{-1}A)^{-1}\right)x,$$
$$\hat{T}_tx=\lim_{n\to\infty} \hat{T}_t^{(n)}x\equiv\lim_{n\to\infty}\exp\left(t\hat{A}(I-n^{-1}\hat{A})^{-1}\right)x,$$

где $\hat{A}=-A$. Операторы $T_t$ и $\hat{T}_t$, как нетрудно видеть, образуют равностепенно непрерывные полугруппы класса $(C_0)$. При $t\geqslant 0$ ввиду свойства равностепенной (относительно $n$) непрерывности $\{T_t^{(n)}\}$ для всякой непрерывной на $X$ полунормы $p$ найдется такая непрерывная полунорма $q$, что

$$p\left(T_t\hat{T}_tx-T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x\right)\leqslant p\left(T_t\hat{T}_tx-T_t^{(n)}\hat{T}_tx\right)+p\left(T_t^{(n)}\hat{T}_tx-T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x\right)\leqslant$$
$$\leqslant p\left(\left(T_t-T_t^{(n)}\right)\hat{T}_tx\right)+q\left(\hat{T}_tx-\hat{T}_t^{(n)}x\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x=T_t\hat{T}_tx$. Таким образом, исходя из равностепенной непрерывности $T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}$, мы установили равностепенную непрерывность операторов $T_t\hat{T}_t$. С другой стороны, поскольку операторы $(I-n^{-1}A)^{-1}$ и $(I-m^{-1}A)^{-1}$ перестановочны, $T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(m)}=\hat{T}_s^{(m)}T_t^{(n)}$. Значит, $\left(T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}\right)\left(T_s^{(n)}\hat{T}_s^{(n)}\right)=T_{t+s}^{(n)}\hat{T}_{t+s}^{(n)}$, и поэтому операторы $(T_t\hat{T}_t)$ при $t\geqslant 0$ обладают полугрупповым свойством $(T_t\hat{T}_t)(T_s\hat{T}_s)=T_{t+s}\hat{T}_{t+s}$; следовательно, $\{T_t\hat{T}_t\}$ — это равностепенно непрерывная полугруппа класса $(C_0)$. Если $x\in D(\hat{A})=D(A)$, то

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}\left(T_h\hat{T}_h-I\right)x=\lim_{h\downarrow 0} T_h h^{-1}(\hat{T}_h-I)x+\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h-I)x=$$
$$=\hat{A}x+Ax=0,$$

и, таким образом, инфинитезимальный производящий оператор $A_1$ полугруппы $\{T_t\hat{T}_t\}$ обращается в нуль для каждого $x\in D(\hat{A})$. Этот оператор $A_1$ должен быть замкнутым, так как оператор $(I-A_1)$ является обратным оператором для непрерывного линейного оператора $(I-A_1)^{-1}\in L(X, X)$. А так как $A_1$ обращается в нуль на плотном подмножестве $D(\hat{A})=D(A)$ пространства $X$, то $A_1$ — это нулевой оператор, принадлежащий $L(X, X)$. Отсюда вытекает, что $(T_t\hat{T}_t)x=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left(t\cdot 0\cdot\left(I-n^{-1}\cdot 0\right)^{-1}\right)x=x$, и поэтому $T_t\hat{T}_t=I$. Следовательно, положив $S_t=T_t$ при $t\geqslant 0$ и $S_{-t}=\hat{T}_t$ при $t\geqslant 0$, мы получим равностепенно непрерывную группу операторов $S_t$, $-\infty<t<\infty$, для которой оператор $A$ служит инфинитезимальным производящим оператором.

**Следствие 1.** В случае когда $X$ является $B$-пространством, условия этой теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a=X$ и существует резольвента $(I-n^{-1}A)^{-1}$, удовлетворяющая оценке

$$\left\|(I-n^{-1}A)^{-m}\right\|\leqslant M \tag{2}$$

для всех $m=1, 2, \ldots$ и всех достаточно больших $|n|$ $(n\gtrless 0)$, где $M>0$ — независимая постоянная.

Для группы $S_t$, удовлетворяющей неравенству

$$\|S_t\|\leqslant Me^{\beta|t|} \quad \text{для всех} \quad t\in(-\infty, \infty) \qquad (\beta\geqslant 0),$$

условия теоремы сводятся к следующим: $D(A)^a=X$ и резольвента $(I-n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем для всех $m=1, 2, \ldots$ и достаточно больших $|n|$ $(n\gtrless 0)$ справедливо неравенство

$$\left\|(I-n^{-1}A)^{-m}\right\|\leqslant M(1-|n^{-1}|\beta)^{-m}. \tag{3}$$

Для частного случая, когда $\|S_t\|\leqslant e^{\beta|t|}$ при всех $t\in(-\infty, \infty)$, условия теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a=X$ и резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем

$$\|(I - n^{-1}A)^{-1}\| \leqslant (1 - |n^{-1}|\beta)^{-1} \tag{4}$$

для всех достаточно больших $|n|$ $(n \gtrless 0)$.

**Доказательство** проводится так же, как для следствия 1 и следствия 2, § 7, гл. IX.

**Следствие 2** (теорема Стоуна). Пусть $\{U_t, -\infty < t < \infty\}$ — группа класса $(C_0)$ унитарных операторов $U_t$, заданных в гильбертовом пространстве $X$. Тогда инфинитезимальный производящий оператор $A$ этой группы представляется в виде $iH$, где $H$ — некоторый самосопряженный оператор.

**Доказательство.** Так как $U_t$ — унитарные операторы, то $(U_t x, y) = \left(x, U_t^{-1} y\right) = (x, U_{-t} y)$, и поэтому

$$(Ax, y) = (x, -Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in D(A).$$

Последнее означает, что оператор $-iA \equiv H$ симметрический. Так как $A$ — инфинитезимальный производящий оператор группы $\{U_t\}$, то оператор $(I - n^{-1}A)^{-1} = (I - n^{-1}iH)$ должен быть ограниченным линейным оператором, для которого выполняется неравенство $\|(I - n^{-1}iH)^{-1}\| \leqslant 1$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Полагая $n = \pm 1$, мы видим, что преобразование Кэли оператора $H$ представляет собой унитарный оператор, и поэтому оператор $H$ самосопряженный.

**Замечание.** Если оператор $A$ имеет вид $A = iH$, где $H$ — самосопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве $X$, то условие (4) следствия 1, как можно показать, используя теорию преобразования Кэли, выполняется. Следовательно, оператор $A$ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой сжимающей полугруппы $U_t$, определенной в пространстве $X$. Нетрудно обнаружить, что операторы $U_t$ будут в этом случае унитарными. В самом деле, сжимающий оператор $U_t$, отображающий гильбертово пространство $X$ в себя, обладает при этих условиях обратным оператором $U_t^{-1} = U_{-t}$. Оператор $U_t^{-1}$ отображает пространство $X$ в себя и тоже является в данном случае сжимающим оператором. Поэтому оператор $U_t$ должен быть унитарным.

## *10. Голоморфные полугруппы*

В этом параграфе мы введем один важный класс полугрупп, а именно полугруппы операторов $T_t$, которые как функции параметра $t$ могут быть голоморфно продолжены на некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий положительную вещественную полуось $t$. Вначале нам потребуется следующая

**Лемма.** Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство $X$. Пусть $\{T_t; t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ —