вента $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем

$$\left\| (I - n^{-1}A)^{-1} \right\| \leqslant (1 - |n^{-1}|\beta)^{-1} \tag{4}$$

для всех достаточно больших $|n|$ $(n \gtrless 0)$.

Доказательство проводится так же, как для следствия 1 и следствия 2, § 7, гл. IX.

Следствие 2 (теорема Стоуна). Пусть $\{U_t, -\infty < t < \infty\}$ — группа класса (C_0) унитарных операторов U_t, заданных в гильбертовом пространстве X. Тогда инфинитезимальный производящий оператор A этой группы представляется в виде iH, где H — некоторый самосопряженный оператор.

Доказательство. Так как U_t — унитарные операторы, то $(U_t x, y) = \left(x, U_t^{-1} y\right) = (x, U_{-t} y)$, и поэтому

$$(Ax, y) = (x, -Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in D(A).$$

Последнее означает, что оператор $-iA \equiv H$ симметрический. Так как A — инфинитезимальный производящий оператор группы $\{U_t\}$, то оператор $(I - n^{-1}A)^{-1} = (I - n^{-1}iH)$ должен быть ограниченным линейным оператором, для которого выполняется неравенство $\left\| (I - n^{-1}iH)^{-1} \right\| \leqslant 1$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Полагая $n = \pm 1$, мы видим, что преобразование Кэли оператора H представляет собой унитарный оператор, и поэтому оператор H самосопряженный.

Замечание. Если оператор A имеет вид $A = iH$, где H — самосопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве X, то условие (4) следствия 1, как можно показать, используя теорию преобразования Кэли, выполняется. Следовательно, оператор A представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой сжимающей полугруппы U_t, определенной в пространстве X. Нетрудно обнаружить, что операторы U_t будут в этом случае унитарными. В самом деле, сжимающий оператор U_t, отображающий гильбертово пространство X в себя, обладает при этих условиях обратным оператором $U_t^{-1} = U_{-t}$. Оператор U_t^{-1} отображает пространство X в себя и тоже является в данном случае сжимающим оператором. Поэтому оператор U_t должен быть унитарным.

10. Голоморфные полугруппы

В этом параграфе мы введем один важный класс полугрупп, а именно полугруппы операторов T_t, которые как функции параметра t могут быть голоморфно продолжены на некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий положительную вещественную полуось t. Вначале нам потребуется следующая

Лемма. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть $\{T_t; t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ —

некоторая равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Предположим, что $T_t X \subseteq D(A)$ при всех $t \geqslant 0$, где $D(A)$ — область определения инфинитезимального производящего оператора A полугруппы $\{T_t\}$. Тогда для всех $x \in X$ функция $T_t x$ бесконечно дифференцируема по t при $t > 0$ и

$$T_t^{(n)} x = \left(T'_{t/n}\right)^n x \quad \text{для всех} \quad t > 0, \tag{1}$$

где $T'_t = D_t T_t$, $T''_t = D_t T'_t$, ..., $T_t^{(n)} = D_t T_t^{(n-1)}$, а D_t — оператор дифференцирования.

Доказательство. Если $t > t_0 > 0$, то $T'_t x = AT_t x = T_{t-t_0} AT_{t_0} x$, так как операторы A и T_s перестановочны при $s \geqslant 0$. Таким образом, $T'_t X \subseteq T_{t-t_0} X \subseteq D(A)$ при $t > 0$, и поэтому производная $T''_t x$ существует для всех $t > 0$ и $x \in X$. Оператор A замкнут, следовательно,

$$\begin{aligned} T''_t x = D_t(AT_t)\, x = A \cdot \lim_{n \to \infty} n\,(T_{t+1/n} - T_t)\, x = \\ = A\,(AT_t)\, x = AT_{t/2} AT_{t/2} x = \left(T'_{t/2}\right)^2 x. \end{aligned}$$

Повторяя эти рассуждения, мы и получим формулу (1). Лемма доказана.

Возьмем теперь некоторое комплексное локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X и заданную в нем равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t;\, t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ класса (C_0). Для такой полугруппы рассмотрим следующие три условия:

(I) $T_t x \in D(A)$ при всех значениях $t > 0$, и существует такая положительная постоянная C, что операторы семейства $\left\{(CtT'_t)^n\right\}$ равностепенно (относительно значений $n \geqslant 0$ и $t \in (0, 1]$) непрерывны.

(II) Функция T_t допускает *слабо голоморфное продолжение* T_λ, определяемое формулой

$$T_\lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - t)^n T_t^{(n)} x / n! \ \text{ в области } \ |\arg \lambda| < \operatorname{arc\,tg}(Ce^{-1}), \tag{2}$$

и семейство операторов $\left\{e^{-\lambda} T_\lambda\right\}$ равностепенно непрерывно относительно λ в области $|\arg \lambda| \leqslant \operatorname{arc\,tg}\left(2^{-k} Ce^{-1}\right)$, (3)
где k — некоторое положительное число.

(III) Существует такая положительная постоянная C_1, что операторы семейства $\{(C_1 \lambda R(\lambda;\, A))^n\}$ равностепенно непрерывны относительно $n \geqslant 0$ и значений λ в области $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 1 + \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число (здесь A — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$).

Имеет место следующая

Теорема. Условия (I), (II) и (III) попарно эквивалентны.

Доказательство. Импликация (I) → (II). Возьмем произвольную непрерывную полунорму p, определенную на пространстве X. Тогда по предположению найдется такая непрерывная на X полунорма q, что $p\left((tT_t')^n x\right) \leqslant C^{-n} q(x)$ $(C > 0)$ для $1 \geqslant t > 0$, $n \geqslant 0$ и всех $x \in X$. Следовательно, согласно (1), при значениях $t > 0$

$$p\left((\lambda - t)^n T_t^{(n)} x/n!\right) \leqslant \frac{|\lambda - t|^n n^n}{t^n n!} \cdot \frac{1}{C^n} \cdot p\left(\left(\frac{t}{n} C T'_{t/n}\right)^n x\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{|\lambda - t|}{t} C^{-1} e\right)^n \cdot q(x), \quad \text{когда} \quad 0 \leqslant t/n \leqslant 1.$$

Поэтому ряд в правой части (2) сходится при $|\arg\lambda| < \operatorname{arctg}(Ce^{-1})$, и функция $T_\lambda x$ вследствие секвенциальной полноты пространства X действительно оказывается определенной для всех $x \in X$. При этом, очевидно, для любых $x \in X$ и $f \in X'$ числовая функция $f(T_t x)$ $(t > 0)$ допускает голоморфное продолжение $f(T_\lambda x)$ в области $|\arg\lambda| < \operatorname{arctg}(Ce^{-1})$, т. е. функция $T_\lambda x$ оказывается *слабо голоморфной*. Применяя теорему Хана — Банаха, мы видим, что $T_\lambda x$ представляет собой продолжение $T_t x$ в области $|\arg\lambda| < \operatorname{arctg}(Ce^{-1})$. Положим теперь $S_t = e^{-t} T_t$. Тогда $S_t' = e^{-t} T_t' - e^{-t} T_t$, откуда ввиду неравенства $0 \leqslant te^{-t} \leqslant 1$ $(t \geqslant 0)$ и условия (I) следует, что семейство операторов $\{(2^{-k} CtS_t')^n\}$ при некотором $k > 0$ равностепенно непрерывно относительно значений $t > 0$ и $n \geqslant 0$, так как операторы семейства $\{T_t\}$ равностепенно непрерывны относительно $t > 0$. Таким образом, $\{S_t\}$ — равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0), такая, что $S_t X \subseteq D(A - I) = D(A)$ при $t > 0$, где $(A - I)$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы S_t. Применяя к S_t тот же способ рассуждений, который использовался для T_t, мы можем показать, что $e^{-\lambda} T_\lambda$ представляет собой слабо голоморфное продолжение функции $S_t = e^{-t} T_t$ и удовлетворяет оценке (3).

Попутно мы можем получить такое

Следствие (Хилле). Если при тех же условиях X является комплексным B-пространством и $\overline{\lim\limits_{t \downarrow 0}} \| tT_t' \| < e^{-1}$, то $X = D(A)$.

Доказательство. При любом фиксированном значении $t > 0$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|(t/n) T'_{t/n}\| < e^{-1},$$

и поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - t)^n T_t^{(n)} x/n! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda - t)^n}{t^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \left(\frac{t}{n} T'_{t/n}\right)^n x$$

сильно сходится в некотором секторе вида

$$\{\lambda;\ |\lambda - t|/t < 1 + \delta\}$$

(δ — некоторое положительное число) комплексной λ-плоскости. Точка $\lambda = 0$ является внутренней точкой этого сектора, откуда и следует наше утверждение.

Импликация (II) → (III). По формуле (10), § 4, гл. IX

$$(\lambda R(\lambda; A))^{n+1}x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}t^n T_t x\,dt \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \ x \in X. \tag{4}$$

Следовательно, полагая $S_t = e^{-t}T_t$, мы получаем

$$((\sigma + 1 + i\tau) R(\sigma + 1 + i\tau; A))^{n+1} x =$$

$$= \frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}t^n S_t x\,dt, \quad \sigma > 0.$$

Возьмем значение $\tau < 0$. Так как подинтегральное выражение слабо голоморфно, мы можем, используя оценку (3) и интегральную теорему Коши, перейти от интегрирования по вещественной полуоси $0 \leqslant t < \infty$ к интегрированию по лучу $re^{i\theta}$ $(0 \leqslant r < \infty)$, содержащемуся в секторе $0 < \arg\lambda < \operatorname{arctg}(2^{-k}Ce^{-1})$ комплексной λ-плоскости. Это дает нам выражение

$$((\sigma + 1 + i\tau) R(\sigma + 1 + i\tau; A))^{n+1} x =$$

$$= \frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)re^{i\theta}} r^n e^{in\theta} S_{re^{i\theta}} x e^{i\theta}\,dr,$$

и, следовательно, по формулам (3)

$$p\left(((\sigma+1+i\tau) R(\sigma+1+i\tau; A))^{n+1} x\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<r<\infty} p\left(S_{re^{i\theta}}x\right)\frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{(-\sigma\cos\theta+\tau\sin\theta)r} r^n\,dr \leqslant$$

$$\leqslant q'(x)\frac{|\sigma+1+i\tau|^{n+1}}{|\tau\sin\theta-\sigma\cos\theta|^{n+1}},$$

где q' — некоторая непрерывная полунорма, заданная на X. Аналогичная оценка легко устанавливается и при $\tau > 0$. Отсюда, используя условие (7) § 4 этой главы, мы и выводим условие (III).

Импликация (III) → (I). Для любой непрерывной полунормы p, определенной на пространстве X, существует такая непрерывная на X полунорма q, что

$$p\left((C_1\lambda R(\lambda; A))^n x\right) \leqslant q(x) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 1 + \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \ n \geqslant 0.$$

Поэтому если $\operatorname{Re}(\lambda_0) \geqslant 1 + \varepsilon$, то

$$p((\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; A)^n x) \leqslant \frac{|\lambda - \lambda_0|^n}{(C_1|\lambda_0|)^n} q(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, при $|\lambda - \lambda_0|/C_1|\lambda_0| < 1$ резольвента $R(\lambda; A)$ существует и определяется рядом

$$R(\lambda;\ A)\,x = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0;\ A)^{n+1} x,$$

и при этом

$$p(R(\lambda;\ A)\,x) \leqslant \left(1 - C_1^{-1}|\lambda_0|^{-1} \cdot |\lambda - \lambda_0|\right)^{-1} q(R(\lambda_0;\ A)\,x).$$

Следовательно, согласно (III), существует такой угол $\theta_0 \in (\pi/2,\ \pi)$, что в секторах $\pi/2 \leqslant \arg\lambda \leqslant 0$ и $-\theta_0 \leqslant \arg\lambda \leqslant -\pi/2$, а также в области $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ при достаточно больших значениях $|\lambda|$ резольвента $R(\lambda; A)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$p(R(\lambda;\ A)\,x) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\, q'(x), \tag{5}$$

где q' — некоторая непрерывная на X полунорма. Поэтому интеграл

$$\hat{T}_t x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)\,x\,d\lambda \qquad (t > 0,\ x \in X) \tag{6}$$

будет сходиться, если за контур интегрирования C_2 принять кривую $\lambda = \lambda(\sigma)$ $(-\infty < \sigma < \infty)$, где функция $\lambda(\sigma)$ выбрана так, что $\lim\limits_{|\sigma|\uparrow\infty} |\lambda(\sigma)| = \infty$ и

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \arg\lambda(\sigma) \leqslant \theta_0, \qquad -\theta_0 \leqslant \arg\lambda(\sigma) \leqslant -\frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

когда соответственно $\sigma \uparrow \infty$ и $\sigma \downarrow -\infty$ ($\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число), а при небольших значениях $|\sigma|$ кривая $\lambda(\sigma)$ лежит в правой полуплоскости комплексной λ-плоскости.

Покажем, что $\hat{T}_t$ совпадает с самой полугруппой T_t. Для этого сначала убедимся в том, что $\lim\limits_{t\downarrow 0} \hat{T}_t x = x$ для всех $x \in D(A)$. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in D(A)$ и выберем комплексное число λ_0, лежащее справа от контура интегрирования C_2. Обозначим $(\lambda_0 I - A)\,x_0$ через y_0. Тогда, используя резольвентное уравнение, мы находим, что

$$\begin{aligned}
\hat{T}_t x_0 = \hat{T}_t R(\lambda_0;\ A)\,y_0 &= (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)\,R(\lambda_0;\ A)\,y_0\,d\lambda = \\
&= (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda;\ A)\,y_0\,d\lambda - \\
&\quad - (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda_0;\ A)\,y_0\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Второй интеграл в правой части обращается в нуль, в чем нетрудно убедиться, смещая влево контур интегрирования. Следовательно,

$$\hat{T}_t x_0 = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{\lambda t} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda;\ A)\, y_0\, d\lambda, \quad y_0 = (\lambda_0 I - A)\, x_0.$$

Условие (5) позволяет перейти здесь под знаком интеграла к пределу при $t \downarrow 0$, и это приводит к равенству

$$\lim_{t \downarrow 0} \hat{T}_t x_0 = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda;\ A)\, y_0\, d\lambda, \quad y_0 = (\lambda_0 I - A)\, x_0.$$

Для того чтобы оценить последний интеграл, образуем замкнутый контур интегрирования, состоящий из дуги круга $|\lambda| = r$, лежащей справа от C_2, и части контура C_2, стягиваемой этой дугой, а оставшуюся часть контура C_2 отбросим. При $r \uparrow \infty$ интеграл по отброшенной части контура C_2 и по дуге окружности стремится ввиду (5) к нулю. Поэтому интересующий нас интеграл равен вычету подинтегральной функции относительно точки λ_0, т. е. равен $R(\lambda_0;\ A)\, y_0 = x_0$. Мы показали таким образом, что $\lim\limits_{t \downarrow 0} \hat{T}_t x_0 = x_0$ при $x_0 \in D(A)$.

Докажем теперь, что $\hat{T}_t' x = A\hat{T}_t x$ при $t > 0$ и $x \in X$. Так как $R(\lambda;\ A)\, X = D(A)$ и $AR(\lambda;\ A) = \lambda R(\lambda;\ A) - I$, то интеграл $(2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{\lambda t} AR(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda$ сходится из-за наличия множителя $e^{\lambda t}$. Аппроксимируя интеграл (6) суммой Римана и используя тот факт, что A — замкнутый оператор $\left(\text{т. е. если } \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \text{ и } \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = y, \text{ то } x \in D(A) \text{ и } Ax = y\right)$, нетрудно установить, что написанный выше интеграл равен $A\hat{T}_t x$. Таким образом,

$$A\hat{T}_t x = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{\lambda t} AR(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Но, с другой стороны, дифференцируя (6) под знаком интеграла, мы получаем

$$\hat{T}_t' x = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{\lambda t} \lambda R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0. \tag{7}$$

Последние два интеграла отличаются друг от друга на слагаемое $(2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{\lambda t} x\, d\lambda$, которое равно нулю, так как величина последнего интеграла не меняется при смещении контура интегрирования влево.

Мы показали, следовательно, что функция $\hat{x}(t) = \hat{T}_t x_0$ $(x_0 \in D(A))$ удовлетворяет условиям 1) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \hat{x}(t) = x_0$, 2) $d\hat{x}(t)/dt = A\hat{x}(t)$ при

$t > 0$ и 3) при $t \uparrow \infty$ функция $\hat{x}(t)$ имеет экспоненциальный порядок роста (это вытекает из (6)). Но, поскольку $x_0 \in D(A)$ и полугруппа $\{T_t\}$ равностепенно относительно значений $t \geqslant 0$ непрерывна, функция $x(t) = T_t x_0$ удовлетворяет условиям $\lim\limits_{t \downarrow 0} x(t) = x_0$, $dx(t)/dt = Ax(t)$ при $t \geqslant 0$, и при этом $x(t)$ ограничена при $t \geqslant 0$. Введем функцию $y(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. Тогда $\lim\limits_{t \downarrow 0} y(t) = 0$, $dy(t)/dt = Ay(t)$ при $t > 0$ и $y(t)$ имеет экспоненциальный порядок роста при $t \uparrow \infty$. Поэтому при достаточно больших положительных значениях $\operatorname{Re}(\lambda)$ можно рассматривать преобразование Лапласа

$$L(\lambda;\ y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t)\, dt.$$

Используя замкнутость оператора A и аппроксимируя написанный ниже интеграл суммой Римана, мы находим, что

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} Ay(t)\, dt = A \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t)\, dt,$$
$$0 \leqslant \alpha < \beta < \infty.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y'(t)\, dt = e^{-\lambda\beta} y(\beta) - e^{-\lambda\alpha} y(\alpha) + \lambda \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t)\, dt.$$

При $\alpha \downarrow 0$ и $\beta \uparrow \infty$ этот интеграл стремится к $\lambda L(\lambda;\ y)$, так как $y(0) = 0$, а $y(\beta)$ имеет при $\beta \uparrow \infty$ экспоненциальный порядок роста. Еще раз используя замкнутость оператора A, мы находим, что $AL(\lambda;\ y) = \lambda L(\lambda;\ y)$ при достаточно больших положительных $\operatorname{Re}(\lambda)$. Поскольку при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ обратный оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует, мы обнаруживаем, что $L(\lambda;\ y) = 0$ при достаточно больших положительных значениях $\operatorname{Re}(\lambda)$. Следовательно, для любого непрерывного линейного функционала $f \in X'$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(y(t))\, dt = 0 \text{ при достаточно больших положительных } \operatorname{Re}(\lambda).$$

Положим $\lambda = \sigma + i\tau$ и введем функцию

$$g_\sigma(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t} f(y(t)) & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Тогда из полученного выше равенства вытекает, что преобразование Фурье

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t} g_\sigma(t)\, dt$$

тождественно обращается в нуль в области $-\infty < \tau < \infty$. Следовательно, по формуле обращения Фурье функция $g_\sigma(t)$ тождественно равна нулю. Таким образом, $f(y(t)) = 0$, и поэтому по теореме Хана — Банаха $y(t) \equiv 0$.

Мы видим теперь, что $\hat{T}_t x = T_t x$ при всех $t > 0$ и $x \in D(A)$. Область $D(A)$ плотна в X и $\hat{T}_t$, $T_t \in L(X, X)$, откуда ясно, что $\hat{T}_t x = T_t x$ при всех $t > 0$ и $x \in X$. Доопределяя $\hat{T}_t$ при $t = 0$ как $\hat{T}_0 = I$, мы получаем совпадение $\hat{T}_t = T_t$ для всех $t \geqslant 0$. Используя теперь формулу (7), мы находим, что

$$T'_t x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} \lambda R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda \qquad (t > 0),$$

и поэтому, учитывая (1) и (5), получаем

$$\left(T'_{t/n}\right)^n x = T_t^{(n)} x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} \lambda^n R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Следовательно,

$$\left(tT'_t\right)^n x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{n\lambda t} (t\lambda)^n R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Отсюда на основании (III)

$$p\left(\left(tT'_t\right)^n x\right) \leqslant (2\pi)^{-1} q(x) \int_{C_2} \left| e^{n\lambda t} \right| \cdot t^n \cdot |\lambda|^{n-1} \cdot d|\lambda|.$$

При $0 < t \leqslant 1$ последний интеграл мажорируется величиной C_3^n, где C_3 — некоторая положительная постоянная. Эту оценку можно получить, разбивая путь интегрирования C_2 на две части, лежащие соответственно в областях $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, и используя известное интегральное представление гамма-функции. Отсюда и вытекает условие равностепенной непрерывности, фигурирующее в (I).

Замечание. Результаты этого раздела принадлежат Иосида [6]. См. также Хилле — Филлипс [1] и Хилле [3].

11. Дробные степени замкнутых операторов

Пусть X — некоторое B-пространство и $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ — равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Введем функцию

$$f_{t,\alpha}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{z\lambda - tz^\alpha}\, dz & \text{при} \quad \lambda \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda < 0, \end{cases} \tag{1}$$