тождественно обращается в нуль в области $-\infty < \tau < \infty$. Следовательно, по формуле обращения Фурье функция $g_\sigma(t)$ тождественно равна нулю. Таким образом, $f(y(t)) = 0$, и поэтому по теореме Хана — Банаха $y(t) \equiv 0$.

Мы видим теперь, что $\hat{T}_t x = T_t x$ при всех $t > 0$ и $x \in D(A)$. Область $D(A)$ плотна в X и $\hat{T}_t$, $T_t \in L(X, X)$, откуда ясно, что $\hat{T}_t x = T_t x$ при всех $t > 0$ и $x \in X$. Доопределяя $\hat{T}_t$ при $t = 0$ как $\hat{T}_0 = I$, мы получаем совпадение $\hat{T}_t = T_t$ для всех $t \geqslant 0$. Используя теперь формулу (7), мы находим, что

$$T'_t x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} \lambda R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda \qquad (t > 0),$$

и поэтому, учитывая (1) и (5), получаем

$$\left(T'_{t/n}\right)^n x = T_t^{(n)} x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} \lambda^n R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Следовательно,

$$\left(tT'_t\right)^n x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{n\lambda t} (t\lambda)^n R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Отсюда на основании (III)

$$p\left(\left(tT'_t\right)^n x\right) \leqslant (2\pi)^{-1} q(x) \int_{C_2} |e^{n\lambda t}| \cdot t^n \cdot |\lambda|^{n-1} \cdot d|\lambda|.$$

При $0 < t \leqslant 1$ последний интеграл мажорируется величиной C_3^n, где C_3 — некоторая положительная постоянная. Эту оценку можно получить, разбивая путь интегрирования C_2 на две части, лежащие соответственно в областях $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, и используя известное интегральное представление гамма-функции. Отсюда и вытекает условие равностепенной непрерывности, фигурирующее в (I).

Замечание. Результаты этого раздела принадлежат Иосида [6]. См. также Хилле — Филлипс [1] и Хилле [3].

11. Дробные степени замкнутых операторов

Пусть X — некоторое B-пространство и $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ — равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Введем функцию

$$f_{t,\alpha}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{z\lambda - tz^\alpha}\, dz & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \lambda < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\sigma > 0$, $t > 0$, $0 < \alpha < 1$ и ветвь функции z^α выбрана так, что $\operatorname{Re}(z^\alpha) > 0$ при $\operatorname{Re}(z) > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (1) обеспечивается множителем e^{-tz^α}. Следуя Бохнеру [2] и Филлипсу [5], мы можем показать, что операторы, определяемые формулами

$$\hat{T}_{t,\alpha}x \equiv \hat{T}_t x = \begin{cases} \int\limits_0^\infty f_{t,\alpha}(s) T_s x\, ds & \text{при} \quad t > 0, \\ x & \text{при} \quad t = 0, \end{cases} \tag{2}$$

образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Более того, можно показать, что полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ голоморфна (Иосида [8], Балакришнан [1]). Инфинитезимальный производящий оператор $\hat{A} = \hat{A}_\alpha$ полугруппы $\{\hat{T}_t\}$ оказывается связанным с инфинитезимальным оператором полугруппы $\{T_t\}$ соотношением

$$\hat{A}_\alpha x = -(-A)^\alpha x \quad \text{для всех} \quad x \in D(A), \tag{3}$$

где нецелые степени $(-A)^\alpha$ оператора $(-A)$ определяются равенством

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I - A)^{-1} (-Ax)\, d\lambda \quad \text{для} \quad x \in D(A), \tag{4}$$

или эквивалентной формулой

$$(-A)^\alpha x = \Gamma(-\alpha)^{-1} \int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha-1} (T_\lambda - I)\, x\, d\lambda, \qquad x \in D(A). \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) установлены Балакришнаном. Для резольвенты оператора $\hat{A}_\alpha$ известна следующая формула Като:

$$(\mu I - \hat{A}_\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^\infty (rI - A)^{-1} \frac{r^\alpha}{\mu^2 - 2\mu r^\alpha \cos \alpha\pi + r^{2\alpha}}\, dr. \tag{6}$$

Эти результаты говорят о том, что среди равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0) содержится обширный класс голоморфных полугрупп.

Для доказательства перечисленных результатов мы приведем ряд предложений, касающихся свойств функции $f_{t,\alpha}(\lambda)$.

Предложение 1. Имеет место представление

$$e^{-ta^\alpha} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)\, d\lambda \qquad (t > 0,\ a > 0). \tag{7}$$

Доказательство. Используя множитель $e^{-z^{\alpha}t}$, обеспечивающий сходимость интеграла (1), нетрудно убедиться в том, что функция $f_{t,\alpha}(\lambda)$ имеет экспоненциальный порядок роста. По интегральной теореме Коши интеграл (1) не зависит от выбора значений $\sigma > 0$. Выберем $a > \sigma = \operatorname{Re}(z) > 0$; тогда по теореме о вычетах

$$\int_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left[\frac{e^{\lambda(z-a)}}{z-a}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} e^{-z^{\alpha}t}\, dz =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{z-a} e^{-z^{\alpha}t}\, dz = e^{-ta^{\alpha}}.$$

Предложение 2. При всех $\lambda > 0$

$$f_{t,\alpha}(\lambda) \geqslant 0 \qquad (\lambda > 0). \tag{8}$$

Доказательство. Положим $a^{\alpha} = g(a)$, $e^{-tx} = h(x)$; тогда

$$(-1)^{n-1} g^{(n)}(a) \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad g(a) \geqslant 0$$

и $\quad (-1)^n h^{(n)}(x) \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ при $a \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$.

Следовательно, функция $k(a) = h(g(a)) = e^{-ta^{\alpha}}$ и ее производные удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}(-1)^n k^{(n)}(a) = (-1) h'(x) (-1)^{n-1} g^{(n)}(a) &+ \\ + \sum_{(p)} D^{(n)}_{(p_0 p_1 \ldots p_\nu)} (-1)^{p_0} h^{(p_0)}(x) &\times \\ \times (-1)^{p_1} g^{(p_1+1)}(a) \ldots (-1)^{p_\nu} g^{(p_\nu+1)}(a) &\geqslant 0\end{aligned} \tag{9}$$

(здесь коэффициенты $D^{(n)}_{(p_0 p_1 \ldots p_\nu)} \geqslant 0$, $p_0 \geqslant 2$, $p_1 \geqslant 0, \ldots, p_\nu \geqslant 0$, причем $p_0 \leqslant \sum_{j=1}^{\nu} p_j = n$ (ν произвольно, $n = 1, 2, \ldots$)).

Доказательство предложения 2 легко выводится теперь из *формулы обращения Поста — Уиддера*

$$f_{t,\alpha}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{n+1} k^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda}\right), \qquad \lambda > 0, \tag{10}$$

которую мы далее установим. Действительно, из (9) и (10) вытекает, что $f_{t,\alpha}(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda > 0$.

Обратимся к выводу формулы (10). Дифференцируя равенство (7) n раз, находим

$$k^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda}\right) = (-1)^n \int_0^\infty s^n e^{-sn/\lambda} f_{t,\alpha}(s)\, ds.$$

Подставим это выражение в правую часть (10) и покажем, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{e^n n!} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[\frac{s}{\lambda} \exp\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)\right]^n f_{t,\alpha}(s)\,ds$$

равен $f_{t,\alpha}(\lambda)$. По формуле Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} n^n \sqrt{2\pi n}/e^n n! = 1,$$

и поэтому нам нужно доказать, что

$$f_{t,\alpha}(\lambda_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi)^{-1}}{\lambda_0} \int_0^\infty n^{1/2} \left[\frac{s}{\lambda_0} \exp\left(1-\frac{s}{\lambda_0}\right)\right]^n f_{t,\alpha}(s)\,ds, \tag{11}$$

где $\lambda_0 > 0$ — произвольное фиксированное положительное число. Зафиксируем теперь какое-нибудь положительное число $\eta < \lambda_0$ и разобьем интеграл в правой части (11) на три слагаемых:

$$\int_0^\infty = \int_0^{\lambda_0-\eta} + \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} + \int_{\lambda_0+\eta}^\infty = J_1 + J_2 + J_3.$$

Поскольку функция xe^{1-x} монотонно возрастает на сегменте $[0, 1]$ от 0 до 1 и функция $f_{t,\alpha}$ ограничена по s, мы видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_1 = 0$. В промежутке $[1, \infty]$ функция xe^{1-x} монотонно убывает от 1 до нуля, и поэтому

$$\frac{\lambda_0+\eta}{\lambda_0} \exp\left(1-\frac{\lambda_0+\eta}{\lambda_0}\right) < \beta < 1,$$

а так как $f_{t,\alpha}(s)$ при $s \uparrow \infty$ растет экспоненциально, то

$$|J_3| \leqslant n^{1/2} e^{n_0} \beta^{n-n_0} \int_0^\infty \left(\frac{s}{\lambda_0}\right)^{n_0} \exp\left(-\frac{n_0 s}{\lambda_0}\right) |f_{t,\alpha}(s)|\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Функция $f_{t,\alpha}(s)$ непрерывна по s, поэтому для всякого положительного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\eta > 0$ столь малым, чтобы при $\lambda_0 - \eta \leqslant s \leqslant \lambda_0 + \eta$ выполнялось неравенство $f_{t,\alpha}(\lambda_0) - \varepsilon \leqslant f_{t,\alpha}(s) \leqslant f_{t,\alpha}(\lambda_0) + \varepsilon$. Таким образом,

$$(f_{t,\alpha}(\lambda_0) - \varepsilon) J_0 \leqslant J_2 \leqslant (f_{t,\alpha}(\lambda_0) + \varepsilon) J_0, \tag{12}$$

где

$$J_0 = \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} n^{1/2} \left[\frac{s}{\lambda_0} \exp\left(1-\frac{s}{\lambda_0}\right)\right]^n ds. \tag{13}$$

Приведенные рассуждения можно, в частности, применить к функции

$$k(a)=a^{-1}=\int_0^\infty e^{-\lambda a}\,d\lambda,$$

(в этом случае $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$ и $k^{(n)}(n/\lambda_0)=(-1)^n n!(\lambda_0/n)^{n+1}$). Подставляя эту функцию в (10), мы легко убеждаемся в том, что для $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$ формула (10) справедлива. Равенство (11) эквивалентно (10), и поэтому оно тоже должно выполняться при $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} J_1=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} J_3=0$ при любой функции $f_{t,\alpha}$, отсюда следует, что

$$1=\lim_{n\to\infty}(2\pi\lambda_0)^{-1}J_0.$$

Это последнее соотношение позволяет на основании неравенств (12) установить справедливость формулы (11) в общем случае. Из (11) вытекает эквивалентная формула (10).

Предложение 3. Имеют место тождества

$$\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda)\,d\lambda=1, \tag{14}$$

$$f_{t+s,\alpha}(\lambda)=\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)f_{s,\alpha}(\mu)\,d\mu. \tag{15}$$

Доказательство. Функция $f_{t,\alpha}(\lambda)$ неотрицательна, и к интегралу (7) можно применить лемму Лебега — Фату:

$$\int_0^\infty \varliminf_{a\downarrow 0}(e^{-\lambda a}f_{t,\alpha}(\lambda))\,d\lambda\leqslant\varliminf_{a\downarrow 0} e^{-ta^\alpha}=1.$$

Следовательно, функция $f_{t,\alpha}(\lambda)$ интегрируема по λ в промежутке $(0,\infty)$, поэтому, применяя лемму Лебега — Фату и равенство (7) еще раз, мы и получаем (14). Далее из (7) мы выводим

$$\begin{aligned}\int e^{-\lambda a}&\left\{\int f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)f_{s,\alpha}(\mu)\,d\mu\right\}d\lambda=\\ &=\int e^{-(\lambda-\mu)a}f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)\,d(\lambda-\mu)\cdot\int e^{-\mu a}f_{s,\alpha}(\mu)\,d\mu=\\ &=e^{-ta^\alpha}\cdot e^{-sa^\alpha}=e^{-(t+s)a^\alpha}=\int e^{-\lambda a}f_{t+s,\alpha}(\lambda)\,d\lambda,\qquad a>0.\end{aligned}$$

Теперь, используя обращение преобразования Лапласа, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, мы и получаем формулу (15).

Предложение 4. Для производной функции $f_{t,\alpha}$ по переменной t выполняется равенство

$$\int_0^\infty \frac{\partial f_{t,\alpha}(\lambda)}{\partial t}\,d\lambda = 0, \qquad t > 0. \tag{16}$$

Доказательство. Перейдем в формуле (1) от интегрирования по прямой $z=\sigma>0$ к контуру, состоящему из двух лучей $z=re^{-i\theta}$ $(0<r<\infty)$ и $z=re^{i\theta}$ $(0<r<\infty)$[1], где $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$; тогда для функции $f_{t,\alpha}$ получится выражение

$$f_{t,\alpha}(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cos\theta - tr^\alpha\cos\alpha\theta)\times$$
$$\times\sin(sr\sin\theta - tr^\alpha\sin\alpha\theta+\theta)\,dr. \tag{17}$$

Аналогично, переходя в формуле

$$\frac{\partial f_{t,\alpha}(\lambda)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{z\lambda - z^\alpha t}(-z^\alpha)\,dz$$

к интегрированию по лучам $z=re^{-i\theta}$ и $z=re^{i\theta}$ $(0<r<\infty)$, мы получаем равенство

$$f'_{t,\alpha}(s)=\frac{\partial f_{t,\alpha}(s)}{\partial t}=\frac{(-1)}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cos\theta - tr^\alpha\cos\alpha\theta)\times$$
$$\times\sin(sr\sin\theta - tr^\alpha\sin\alpha\theta+\alpha\theta+\theta)\,r^\alpha\,dr. \tag{18}$$

Выберем теперь значение $\theta=\theta_\alpha=\pi/(1+\alpha)$; тогда

$$f'_{t,\alpha}(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp((sr+tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)\sin((sr-tr^\alpha)\sin\theta_\alpha)\,r^\alpha\,dr. \tag{19}$$

Выражение (19) показывает, что производная $f'_{t,\alpha}(s)$ интегрируема по s в промежутке $(0,\infty)$, так как под знаком интеграла в (19) содержится множитель вида r^α $(0<\alpha<1)$. Это позволяет продифференцировать выражение (14) по t под знаком интеграла, что и приводит к соотношению (16).

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. Семейство операторов $\{\hat{T}_t\}$ образует голоморфную полугруппу.

---

[1] Луч $re^{-i\theta}$ проходится из бесконечности к началу координат, а луч $re^{i\theta}$ — из начала координат в бесконечность. — *Прим. перев.*

Доказательство. Тот факт, что $\{\hat{T}_t\}$ обладает полугрупповым свойством $\hat{T}_t\hat{T}_s = \hat{T}_{t+s}\,(t, s > 0)$, вполне очевиден вследствие (2) и (15). Из определения (2) и равенства (17) следует, что

$$\hat{T}_t x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty T_s x\, ds \int_0^\infty \exp((sr + tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)\times$$
$$\times \sin((sr - tr^\alpha)\sin\theta_\alpha + \theta_\alpha)\, dr, \qquad (20)$$

где $\theta = \theta_\alpha = \pi/(1+\alpha)$. Переходя в (20) к новым переменным

$$s = vt^{1/\alpha},\quad r = ut^{-1/\alpha}, \qquad (21)$$

мы получаем

$$\hat{T}_t x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_{vt^{1/\alpha}} x\, dv \int_0^\infty \exp((uv + u^\alpha)\cos\theta_\alpha)\times$$
$$\times \sin((uv - u^\alpha)\sin\theta_\alpha + \theta_\alpha)\, du. \qquad (20')$$

Внутренний интеграл в (20′) равен $\pi f_{1,\alpha}(v)$, поэтому, используя (14) и равномерную (относительно значений $t \geqslant 0$) ограниченность множества $\{\|T_t x\|\}$, мы устанавливаем оценку

$$\|\hat{T}_t x\| \leqslant \sup_{t\geqslant 0}\|T_t x\| \int_0^\infty f_{1,\alpha}(v)\, dv = \sup_{t\geqslant 0}\|T_t x\|. \qquad (22)$$

Так как функция $f_{1,\alpha}(v)$ интегрируема в промежутке $[0, \infty)$, то можно перейти в (20′) к пределу при $t \downarrow 0$, откуда ввиду (14) мы получаем

$$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} \hat{T}_t x = \int_0^\infty f_{1,\alpha}(v)\, dv \cdot x = x.$$

Таким образом, $\{\hat{T}_t\}$ — равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0), и для нее справедлива оценка (22).

Поскольку функция $f'_{t,\alpha}(s) = \partial f_{t,\alpha}(s)/\partial t$ интегрируема по промежутку $[0, \infty)$ и операторы полугруппы $\{T_t\}$ равностепенно непрерывны, мы можем продифференцировать выражение (2) по t под знаком интеграла

$$\hat{T}'_t x = \int_0^\infty f'_{t,\alpha}(s)\, T_s x\, ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_s x\, ds \int_0^\infty \exp((sr + tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)\times$$
$$\times \sin((sr - tr^\alpha)\sin\theta_\alpha)\, r^\alpha\, dr. \qquad (23)$$

Делая в (23) замену переменных (21), находим

$$\hat{T}'_t x = \int_0^\infty \left(T_{vt^{1/\alpha}} x\right) f'_{1,\alpha}(v)\, dv \cdot t^{-1}.$$

Отсюда следует оценка

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \| t \hat{T}'_t \| < \infty,$$

так как операторы семейства $\{T_t\}$ равностепенно непрерывны относительно значений $t \geqslant 0$ и интеграл от функции $f'_{1,\alpha}(v)$ по промежутку $[0, \infty)$ сходится. Полученная оценка говорит о том, что полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ голоморфна.

Теорема 2. Инфинитезимальный производящий оператор $\hat{A}_\alpha$ полугруппы $\{\hat{T}_t\}$ связан с соответствующим оператором полугруппы $\{T_t\}$ формулой (3), в которой выражение $(-A)^\alpha$ определяется равенством (4) или эквивалентным соотношением (5). Кроме того, имеет место представление (6).

Доказательство. Из формул (16) и (23) мы получаем

$$\hat{T}'_t x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (T_s - I)\, x\, ds \int_0^\infty \exp\left((sr + tr^\alpha)\cos\theta_\alpha\right) \times$$
$$\times \sin\left((sr - tr^\alpha)\sin\theta_\alpha\right) r^\alpha\, dr. \tag{24}$$

Если $x \in D(A)$, то $s\text{-}\lim_{s \downarrow 0} s^{-1}(T_s - I)\, x = Ax$, и нормы $\|(T_s - I)\, x\|$ равномерно ограничены по s при $s \geqslant 0$. Поэтому, переходя в (24) к пределу при $t \downarrow 0$, мы находим, что

$$s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} \hat{T}'_t x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (T_s - I)\, x\, ds \int_0^\infty \exp(sr\cos\theta_\alpha)\sin(sr\sin\theta_\alpha)\, r^\alpha\, dr =$$
$$= (-\Gamma(-\alpha))^{-1} \int_0^\infty s^{-\alpha-1}(T_s - I)\, x\, ds.$$

Действительно, если учесть, что $(\alpha + 1)\,\theta_\alpha = \pi$, то известные из теории Γ-функций формулы

$$\Gamma(z) = c^z \int_0^\infty e^{-cr} r^{z-1}\, dr \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0,\ \operatorname{Re}(c) > 0) \tag{25}$$

и

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \pi/\sin \pi z \tag{26}$$

приводят к следующему результату:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cos\theta_\alpha)\sin(sr\sin\theta_\alpha)r^\alpha\,dr = (\pi i)^{-1}\,\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty e^{-r(-se^{i\theta_\alpha})}r^\alpha\,dr\right\} =$$

$$= (\pi i)^{-1}\,\mathrm{Im}\left((-se^{i\theta_\alpha})^{-\alpha-1}\right)\Gamma(1+\alpha) = s^{-\alpha-1}\pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\,\Gamma(1+\alpha) =$$

$$= s^{-\alpha-1}\frac{-\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)} = (-\Gamma(-\alpha))^{-1}s^{-\alpha-1}.$$

Теперь, учитывая, что функция $\hat{T}_t x$ непрерывна в точке $t = 0$, а инфинитезимальный производящий оператор $\hat{A}_\alpha$ замкнут, и используя равенство $\hat{T}'_t x = \hat{A}_\alpha \hat{T}_t x$ (при $t > 0$), мы выводим формулу

$$\hat{A}_\alpha x = (-\Gamma(-\alpha))^{-1}\int_0^\infty s^{-\alpha-1}(T_s - I)\,x\,ds \quad \text{для} \quad x \in D(A).$$

Отсюда, из формул $(tI - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-ts}T_s\,ds$ и (25), (26) получаем

$$\hat{A}_\alpha x = \Gamma(-\alpha)^{-1}\,\Gamma(1+\alpha)^{-1}\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha\,dt\right\}(I - T_s)\,x\,ds =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha\left((tI - A)^{-1} - t^{-1}I\right)x\,dt =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\,(tI - A)^{-1}\,Ax\,dt \quad \text{для всех} \quad x \in D(A).$$

Полагая, наконец, в формулах (17) и (2) $\theta = \pi$, находим

$$(\mu I - \hat{A}_\alpha)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\mu t}\,\hat{T}_t\,dt =$$

$$= \pi^{-1}\int_0^\infty dr\int_0^\infty e^{-sr}T_s\,ds\int_0^\infty \exp(-\mu t - tr^\alpha\cos\alpha\pi)\sin(tr^\alpha\sin\alpha\pi)\,dt =$$

$$= \pi^{-1}\int_0^\infty (rI - A)^{-1}\left\{\int_0^\infty \exp(-\mu t - tr^\alpha\cos\alpha\pi)\sin(tr^\alpha\sin\alpha\pi)\,dt\right\}dr =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty (rI - A)^{-1}\frac{r^\alpha}{\mu^2 - 2r^\alpha\mu\cos\alpha\pi + r^{2\alpha}}\,dr.$$

Замечание. Формула (2) была предложена Бохнером [2] без подробного доказательства. См. также Филлипс [5]. Тот факт, что операторы $\hat{T}_t$ образуют голоморфную полугруппу, доказали Иосида [8], Балакришнан [1] и Като [2]. Формулы (4) и (5) принадлежат Балакришнану, который показал, что для замкнутого оператора A, удовлетворяющего условию

$$\begin{gathered}\text{резольвента } R(\lambda;\ A) = (\lambda I - A)^{-1} \\ \text{существует при } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \\ \text{и } \sup_{\operatorname{Re}(\lambda) > 0} |\operatorname{Re}(\lambda)| \cdot \|R(\lambda;\ A)\| < \infty,\end{gathered} \tag{27}$$

формула (4) определяет линейный оператор $(-A)^{\alpha}$. Он показал также, что $(-A)^{\alpha}$ обладает обычными свойствами выражений с дробными степенями. А именно справедлива

Теорема 3. Пусть замкнутый линейный оператор A удовлетворяет требованию (27). Тогда формула (4) определяет линейный оператор $(-A)^{\alpha}$, обладающий следующими свойствами:

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x = (-A)^{\alpha+\beta}x \quad \text{при } x \in D(A^2) \text{ и } \alpha,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta < 1, \tag{28}$$

$$s\text{-}\lim_{\alpha \uparrow 1}(-A)^{\alpha}x = -Ax \quad \text{для } x \in D(A), \tag{29}$$

$$\text{если } s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda R(\lambda;\ A)x = 0, \quad \text{то } s\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0}(-A)^{\alpha}x = x. \tag{30}$$

При этом если за A принять инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0), то

$$(A_{\alpha})_{\beta} = A_{\alpha\beta}, \tag{31}$$

где через A_{α} обозначен оператор $\hat{A}_{\alpha}$, определяемый формулой Като (6).

Замечание. Формулу (31) установил Ватанабе [1].

Доказательство. Согласно (27), величина $\|r^{\alpha-1}(rI - A)^{-1}(-Ax)\|$ имеет при $r \uparrow \infty$ порядок $O(r^{\alpha-2})$, и, поскольку $(rI - A)^{-1}(-Ax) = x - r(rI - A)^{-1}x$, эта норма ввиду (27) при $r \downarrow 0$ представляет собой величину порядка $O(r^{\alpha-1})$. Поэтому интеграл в правой части формулы (4) будет сходиться.

Вполне очевидно, что $(-A)^{\beta}x \in D(A)$ для $x \in D(A^2)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно аппроксимировать интеграл суммами Римана и использовать свойство замкнутости оператора A. Поэтому мы можем определить выражение $(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x$:

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\lambda^{\beta-1}\mu^{\alpha-1}R(\lambda;\ A)\,R(\mu;\ A)\,A^2x\,d\lambda\,d\mu.$$

Разбивая путь интегрирования на две части, для которых соответственно $\lambda \geqslant \mu$ и $\lambda < \mu$, мы получаем

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^1\left(\sigma^{\beta-1}+\sigma^{\alpha-1}\right)d\sigma\times \int_0^{\infty}\lambda^{\alpha+\beta-1}R(\lambda\sigma;\ A)\,R(\lambda;\ A)\,A^2x\,d\lambda.$$

Для элементов $x \in D(A)$ можно воспользоваться равенством

$$R(\lambda;\ A)(-A) = I - \lambda R(\lambda;\ A)$$

и резольвентным уравнением

$$R(\lambda;\ A) - R(\mu;\ A) = (\mu-\lambda)\,R(\lambda;\ A)\,R(\mu;\ A),$$

что приводит к формуле

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\cdot s\text{-}\lim_{t\uparrow 1}\int_0^t\left(\sigma^{\beta-1}+\sigma^{\alpha-1}\right)(1-\sigma)^{-1}\,d\sigma\times \int_0^{\infty}\lambda^{\alpha+\beta-1}\left(-\sigma R(\lambda\sigma;\ A)+R(\lambda;\ A)\right)(-Ax)\,d\lambda =$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^1\frac{\sigma^{\beta-1}+\sigma^{\alpha-1}-\sigma^{-\alpha}-\sigma^{-\beta}}{1-\sigma}\,d\sigma\right)\times \lambda^{\alpha+\beta-1}R(\lambda;\ A)(-Ax)\,d\lambda.$$

Выражение, стоящее справа в круглых скобках под знаком интеграла, оказывается равным $\pi^{-1}\sin\pi(\alpha+\beta)$ — чтобы вычислить эту величину, достаточно разложить множитель $(1-\sigma)^{-1}$ в ряд по степеням σ. Мы получаем, таким образом, формулу (28).

Для вывода равенства (29) используем формулу $\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}(1+\lambda)^{-1}\,d\lambda = \pi/\sin\alpha\pi$. Это приводит к следующему результату:

$$(-A)^{\alpha}x - (-A)\,x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}\left(R(\lambda;\ A)-\frac{1}{\lambda+1}I\right)(-Ax)\,d\lambda.$$

Зафиксируем некоторое произвольное значение $C > 0$ и разобьем путь интегрирования на две части: от нуля до C и от C до ∞. При фиксированном C интеграл, соответствующий первой части, стремится к нулю при $\alpha \uparrow 1$, так как выражение $R(\lambda; A)(-Ax) = x - \lambda R(\lambda; A)x$ ограничено (по норме) при $\lambda > 0$. Второй интеграл не превосходит по норме выражения

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\pi(1-\alpha)} C^{\alpha-1} \sup_{\lambda \geqslant C} \left\| \left(\lambda R(\lambda; A) - \frac{\lambda}{\lambda+1} I\right)(-Ax) \right\|.$$

Но $x - \lambda R(\lambda; A)x = R(\lambda; A)(-Ax)$, и поэтому, учитывая (27), мы видим, что $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\uparrow\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x$. Поэтому предел

$$s\text{-}\lim_{\alpha\uparrow 1} \frac{\sin \alpha\pi}{\pi(1-\alpha)} C^{\alpha-1} \sup_{\lambda \geqslant C} \left\| \left(\lambda R(\lambda; A) - \frac{\lambda}{\lambda+1} I\right)(-Ax) \right\|$$

может быть сделан сколь угодно малым, если выбрать достаточно большое значение C. Отсюда и вытекает (29).

Для доказательства формулы (30) мы опять разобьем интеграл на две части, соответствующие промежуткам от нуля до C и от C до ∞. В силу условия (27) второй интеграл будет стремиться к нулю при $\alpha \downarrow 0$. Поскольку $R(\lambda; A)(-Ax) = x - \lambda R(\lambda; A)x$ и по предположению $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0} \lambda R(\lambda; A)x = 0$, первый интеграл при достаточно малых значениях $C > 0$ будет близок к величине $(\alpha\pi)^{-1} \sin \alpha\pi \cdot C^{\alpha} x$, которая стремится к x при $\alpha \downarrow 0$. Отсюда и следует формула (30).

Покажем теперь, что если оператор A порождает равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t\}$ класса (C_0), то имеет место свойство (31). Используя представление (6), мы получаем

$$(\mu I - (A_\alpha)_\beta)^{-1} = \int_0^\infty \int_0^\infty (2\pi i)^{-2} \left(\frac{1}{\mu - \lambda^\beta e^{-i\pi\beta}} - \frac{1}{\mu - \lambda^\beta e^{i\pi\beta}}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{\lambda - \zeta^\alpha e^{-i\pi\alpha}} - \frac{1}{\lambda - \zeta^\alpha e^{i\pi\alpha}}\right)(\zeta I - A)^{-1} \, d\lambda \, d\zeta.$$

Этот двойной интеграл, как нетрудно показать, абсолютно сходится по норме, и поэтому можно изменить порядок интегрирования. Это дает нам формулу (31), так как внутренний (после изменения порядка интегрирования) интеграл приводится к виду

$$(2\pi i)^{-2} \int_l \frac{1}{\mu - z^\beta} \left(\frac{1}{z - \zeta^\alpha e^{-i\pi\alpha}} - \frac{1}{z - \zeta^\alpha e^{i\pi\alpha}}\right) dz,$$

где в качестве контура l можно взять берега разреза комплексной z-плоскости, проходящего по отрицательной части вещественной оси, и равен выражению

$$(2\pi i)^{-} \left(\frac{-1}{\mu - \zeta^{\alpha\beta} e^{-i\pi\alpha\beta}} - \frac{-1}{\mu - \zeta^{\alpha\beta} e^{i\pi\alpha\beta}}\right).$$

Пример дробной степени оператора. Если $\alpha = 1/2$, то, взяв значение $\theta = \pi$, мы получаем из формулы (17) выражение

$$f_{t,1/2}(s) = \pi^{-1} \int_0^\infty e^{-sr} \sin(tr^{1/2})\, dr = \pi^{-1} \sqrt{\pi}\, t\,(2^3 \sqrt{s})^{-3}\, e^{-t^2/4s}. \qquad (32)$$

Возьмем полугруппу $\{T_t\}$, образованную интегральными операторами с *ядром Гаусса* (типа гауссовского распределения вероятностей):

$$(T_t x)(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-v)^2/4s} x(v)\, dv, \quad x \in C[-\infty, \infty].$$

Тогда

$$\left(\hat{T}_{t,1/2} x\right)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty x(v) \frac{t}{4\pi s^2} e^{-((u-v)^2+t^2)/4s}\, ds \right\} dv =$$

$$= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + (u-v)^2} x(v)\, dv,$$

т. е. операторы $\hat{T}_{t,1/2}$ — это интегральные операторы с *ядром Пуассона*. Инфинитезимальный производящий оператор A полугруппы $\{T_t\}$ представляет собой в этом случае дифференциальный оператор d^2/ds^2, в то время как инфинитезимальным оператором $\hat{A}$, порождающим полугруппу $\hat{T}_t$, служит сингулярный интегральный оператор [1])

$$\left(\hat{A}_{1/2} x\right)(s) = s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s-v) - x(s)}{v^2 + h^2}\, dv,$$

а не дифференциальный оператор d/ds [2]).

---

[1]) Действительно, согласно формуле (1), гл. IX, § 3, производящий оператор полугруппы $\{\hat{T}_{t,1/2}\}$ определяется выражением

$$(\hat{A}_{1/2} x)(s) = s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (\hat{T}_{h,1/2} - I)\, x(s) =$$

$$= s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \left\{ \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)\, dt}{h^2 + (s-t)^2} - x(s) \right\} =$$

$$= s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \left\{ \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)\, dt}{h^2 + (s-t)^2} - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)\, dt}{h^2 + (s-t)^2} \right\} =$$

$$= s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t) - x(s)}{h^2 + (s-t)^2}\, dt = s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s-v) - x(s)}{v^2 + h^2}\, dv.$$

—*Прим. перев.*

[2]) Это не противоречит доказанным выше теоремам, так как свойство (28) было установлено в предположении, что $\alpha + \beta < 1$. — *Прим. перев.*