12. Сходимость последовательностей полугрупп. Теорема Троттера—Като

Обозначим через $\exp(tA)$ полугруппу класса (C_0), для которой оператор A служит инфинитезимальным производящим оператором.

Следующая теорема относится к вопросу о сходимости последовательности полугрупп.

Теорема 1. Рассмотрим комплексное локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть $\{\exp(tA_n)\} \subseteq L(X, X)$ — некоторая последовательность равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0), такая, что операторы семейства $\{\exp(tA_n)\}$ равностепенно непрерывны относительно $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$, т. е. для всякой непрерывной полунормы $p(x)$, заданной на X, существует такая непрерывная на X полунорма $q(x)$, что

$$p(\exp(tA_n)x) \leqslant q(x) \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0, \; x \in X \text{ и } n = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Допустим, что для некоторого комплексного числа λ_0, у которого $\operatorname{Re}(\lambda_0) > 0$, выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0;\ A_n)x = J(\lambda_0)x \text{ существует при всех } x \in X$$
$$\text{и при этом область значений } R(J(\lambda_0)) \text{ плотна в } X. \tag{2}$$

Тогда оператор $J(\lambda_0)$ представляет собой резольвенту инфинитезимального производящего оператора A некоторой равностепенно непрерывной полугруппы $\{\exp(tA)\}$ класса (C_0), определенной в пространстве X, и

$$\lim_{n\to\infty} \exp(tA_n)x = \exp(tA)x \quad \text{при всяком } x \in X. \tag{3}$$

Кроме того, на всяком бикомпактном множестве значений t в формуле (3) имеет место равномерная (относительно t) сходимость.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая

Лемма. Пусть операторы $T_t = \exp(tA)$, заданные в пространстве X, образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Тогда для всякой непрерывной на X полунормы $p(x)$ найдется такая непрерывная заданная на пространстве X полунорма $q(x)$, что

$$p\left(T_t x - (I - tn^{-1}A)^{-n}x\right) \leqslant (2n)^{-1}t^2 q(A^2x)$$
$$\text{для всех} \quad x \in D(A^2) \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим оператор $(I - n^{-1}tA)^{-n}$ через $T(t, n)$. Мы знаем (см. гл. IX, § 7), что семейство $\{T(t, n)\}$ равностепенно непрерывно относительно значений $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того (см. гл. IX, § 4), для любого $x \in D(A)$

$$D_t T(t, n) = (I - n^{-1}tA)^{-n-1}Ax = A(I - n^{-1}tA)^{-n-1}x,$$
$$D_t T x = T_t A x = A T_t x.$$

Следовательно, поскольку операторы T_t и $T(t, n)$ перестановочны,

$$T_t x - T(t, n)x = \int_0^t [D_s T(t-s, n) T_s x]\, ds =$$
$$= \int_0^t T(t-s, n) T_s \left(Ax - \left(I - \frac{t-s}{n} A\right)^{-1} Ax\right) ds, \quad x \in D(A). \tag{5}$$

Поэтому если $x \in D(A^2)$, то, ввиду того что

$$(I - m^{-1}A)^{-1} Ax = -m\left(I - (I - m^{-1}A)^{-1}\right)x,$$

имеем

$$p(T_t x - T(t, n)x) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t p\left[T(t-s, n) T_s (I - n^{-1}(t-s)A)^{-1} \frac{s-t}{n} A^2 x\right] ds.$$

Отсюда, учитывая, что полунорма $q(x)$ непрерывна в X и ее выбор не зависит от x и n, мы получаем

$$p(T_t x - T(t, n)x) \leqslant (2n)^{-1} t^2 q(A^2 x).$$

Следствие. При любых $s > 0$ и $t \geqslant 0$ для всякой непрерывной полунормы $p(x)$ можно указать такую непрерывную на X полунорму $q_1(x)$, не зависящую от t и s, что

$$p(T_t x - (I - sA)^{-[t/s]}x) \leqslant sq_1(Ax) + \frac{ts}{2} q(A^2 x) \text{ при всех } x \in D(A^2), \tag{6}$$

где $[t/s]$ — целая часть t/s (наибольшее целое число, не превосходящее t/s).

Доказательство. Полагая $t = ns$, получаем

$$p(T_{ns}x - (I - sA)^{-n}x) \leqslant 2^{-1} stq(A^2 x).$$

Если $t = ns + u$, где $0 \leqslant u < s$ и $n = [t/s]$, то

$$p(T_t x - T_{ns}x) = p\left(\int_{ns}^t T'_\sigma x\, d\sigma\right) \leqslant \int_{ns}^t p(T_\sigma Ax)\, d\sigma \leqslant sq_1(Ax).$$

Таким образом, следствие доказано.

Доказательство теоремы 1. Формула (1) и оценка (11) из § 4 гл. IX показывают, что при рассматриваемых условиях семейство

$\{(\mathrm{Re}(\lambda) R(\lambda;\ A_n))^m\}$ равностепенно непрерывно (относительно значений $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$). Отсюда и из условия (2) следует, что существует некоторый оператор A, такой, что $J(\lambda_0) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$ и

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda;\ A_n)\, x = R(\lambda;\ A)\, x \text{ при всех } \mathrm{Re}(\lambda) > 0, \tag{7}$$

причем сходимость равномерна относительно λ на всяком бикомпактном множестве из правой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

Для того чтобы доказать сформулированное утверждение, обратим внимание на то, что

$$R(\lambda;\ A_n)\, x = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m R(\lambda_0;\ A_n)^{m+1} x \quad (\text{при } |\lambda - \lambda_0|/\mathrm{Re}(\lambda_0) < 1),$$

причем написанный здесь ряд, в силу равностепенной непрерывности операторов семейства $\{(\mathrm{Re}(\lambda_0) R(\lambda_0;\ A_n))^m\}$ относительно значений $n = 1, 2, \ldots$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$, сходится равномерно в области $|\lambda - \lambda_0|/\mathrm{Re}(\lambda_0) \leqslant 1 - \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное достаточно малое положительное число. Следовательно, для любого $\delta > 0$ существуют такое значение m_0 и такая непрерывная на X полунорма $q(x)$, что

$$p(R(\lambda;\ A_n)\, x - R(\lambda;\ A_{n'})\, x) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=0}^{m_0} |\lambda_0 - \lambda|^m\, p(R(\lambda_0;\ A_n)^{m_0+1} x - R(\lambda_0;\ A_{n'})^{m_0+1} x) + 2\delta q(x)$$
$$\text{для всех} \quad x \in X.$$

Поэтому, учитывая условие (2), мы видим, что равномерный предел $\lim\limits_{n\to\infty} R(\lambda;\ A_n)\, x = J(\lambda)\, x$ существует при $|\lambda - \lambda_0|/\mathrm{Re}(\lambda_0) \leqslant 1 - \varepsilon$. Это обстоятельство позволяет расширить область сходимости последовательности $\{R(\lambda;\ A_n)\}$, и, таким образом, последовательность $\{R(\lambda;\ A_n)\}$ сходится при $n \to \infty$ к $J(\lambda)\, x$ при $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, а на всяком бикомпактном множестве значений λ, лежащем в правой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, эта сходимость равномерна. Отсюда следует, что оператор $J(\lambda)$ является псевдорезольвентой, поскольку он, очевидно, так же как и $R(\lambda;\ A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяет резольвентному уравнению. Но в данном случае $R(J(\lambda_0))^a = X$, и по эргодической теореме о псевдорезольвентах (гл. VIII, § 4) оператор $J(\lambda)$ служит резольвентой некоторого замкнутого оператора A, так что $J(\lambda) = R(\lambda;\ A)$ и область $D(A) = R(R(\lambda;\ A))$ плотна в пространстве X.

Эти рассуждения показывают, что операторы $\exp(tA)$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0) в пространстве X.

Мы должны теперь убедиться в справедливости утверждения (3). Из (6) следует, что при любом $x \in X$ и произвольных $s > 0$, $t \geqslant 0$

$$p\left((\exp(tA_n) - (I - sA_n))^{-[t/s]}(I - A_n)^{-2}x\right) \leqslant$$
$$\leqslant sq_1\left(A_n(I - A_n)^{-2}x\right) + 2^{-1}tsq\left(A_n^2(I - A_n)^{-2}x\right).$$

Операторы

$$A_n(I - A_n)^{-1} = (I - A_n)^{-1} - I,$$
$$A_n(I - A_n)^{-2} = A_n(I - A_n)^{-1}(I - A_n)^{-1},$$
$$A_n^2(I - A_n)^{-2} = \left(A_n(I - A_n)^{-1}\right)^2$$

равностепенно непрерывны относительно значений $n = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, из (7) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} (I - sA_n)^{-[t/s]}(I - A_n)^{-2}x = (I - sA)^{-[t/s]}(I - A)^{-2}x,$$

причем сходимость в этом равенстве равномерна по s и t, если значения $s > 0$ отграничены от 0 и ∞, а t изменяется на произвольном бикомпактном множестве из $[0, \infty)$. Кроме того, из условия (6) видно, что

$$p\left(\left(\exp(tA) - (I - sA)^{-[t/s]}\right)(I - A)^{-2}x\right) \leqslant$$
$$\leqslant sq_1\left(A(I - A)^{-2}x\right) + 2^{-1}tsq\left(A^2(I - A)^{-2}x\right)$$

при любых $x \in X$, $s > 0$ и $t \geqslant 0$. Поэтому, выбирая величину $s > 0$ достаточно малой, мы приходим к заключению, что

$$\lim_{n\to\infty} \exp(tA_n)\,y = \exp(tA)\,y \quad \text{при всех } y \in R(1;\ A)^2 X,$$

и при этом сходимость равномерна относительно значений t из всякого бикомпактного множества в $[0, \infty)$. Поскольку множество $R(1;\ A)^2 X$ плотно в X, мы видим, что условие (3) выполняется, так как полугруппы $\exp(tA)$ и $\exp(tA_n)$ равностепенно непрерывны относительно значений $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{\exp(tA_n)\}$ равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0), заданных в пространстве X, равностепенно непрерывна относительно значений $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Если для каждого элемента $x \in X$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \exp(tA_n)\,x = \exp(tA)\,x,$$

причем последовательность $\{\exp(tA_n)\,x\}$ сходится к $\exp(tA)\,x$ равномерно на всяком бикомпактном множестве значений $t \geqslant 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda;\ A_n)\,x = R(\lambda;\ A)\,x \text{ для всякого } x \in X \text{ и } \mathrm{Re}(\lambda) > 0,$$

причем последовательность $\{R(\lambda;\ A_n)x\}$ сходится равномерно на всяком бикомпактном множестве из правой полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

Доказательство. Имеет место представление

$$R(\lambda;\ A)x - R(\lambda;\ A_n)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(\exp(tA) - \exp(tA_n))\,x\,dt.$$

Разбивая путь интегрирования на два участка $[0,\ C]$ и $[C,\ \infty)$ $(C > 0)$, мы легко устанавливаем справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Для случая банахова пространства X теорема 1 была доказана Троттером [1]. В этой работе доказательство того факта, что оператор $J(\lambda)$ есть резольвента $R(\lambda;\ A)$, проведено не вполне четко. Последнее было отмечено Като. Доказательство, приведенное в этом параграфе, использует конструкцию, которую применил Като при модификации теоремы Троттера для случая B-пространств (доказательство Като не опубликовано).

13. Сопряженные полугруппы. Теорема Филлипса

Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X, и пусть $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X,\ X)$ — некоторая равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Тогда семейство $\{T_t^*;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X',\ X')$, где звездочкой обозначены сопряженные операторы, как это видно из теоремы 3 § 1 гл. VII, обладает полугрупповым свойством: $T_t^* \cdot T_s^* = T_{t+s}^*$, $T_0^* = I^*$ (I^* — тождественный оператор из $L(X',\ X')$). Но $\{T_t^*,\ t \geqslant 0\}$ может, вообще говоря, и не быть полугруппой класса (C_0). Дело в том, что отображение $T_t \to T_t^*$ не обязательно должно сохранять непрерывность по переменной t (см. предложение 1 § 1 гл. VII). Мы можем, однако, показать, что операторы семейства $\{T^*\}$ равностепенно непрерывны относительно значений $t \geqslant 0$.

Предложение 1. Если семейство $\{S_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X,\ X)$ равностепенно непрерывно относительно значений $t \geqslant 0$, то операторы $S_t^* \in \{S_t^*;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X',\ X')$ тоже равностепенно непрерывны относительно $t \geqslant 0$.

Доказательство. Из предположений теоремы следует, что множество $\bigcup\limits_{t \geqslant 0} S_t \cdot B$ ограничено в пространстве X при любом выборе ограниченного множества $B \subseteq X$. Обозначим через U' и V' поляры множеств B и $\bigcup\limits_{t \geqslant 0} S_t \cdot B$:

$$U' = \left\{x' \in X';\ \sup_{b \in B} |\langle b,\ x'\rangle| \leqslant 1\right\},\quad V' = \left\{x' \in X';\ \sup_{\substack{b \in B,\\ t \geqslant 0}} |\langle S_t b,\ x'\rangle| \leqslant 1\right\}.$$