причем последовательность $\{R(\lambda;\ A_n)x\}$ сходится равномерно на всяком бикомпактном множестве из правой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda)>0$.

Доказательство. Имеет место представление

$$R(\lambda;\ A)x-R(\lambda;\ A_n)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\exp(tA)-\exp(tA_n))\,x\,dt.$$

Разбивая путь интегрирования на два участка $[0,\ C]$ и $[C,\ \infty)$ $(C>0)$, мы легко устанавливаем справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Для случая банахова пространства X теорема 1 была доказана Троттером [1]. В этой работе доказательство того факта, что оператор $J(\lambda)$ есть резольвента $R(\lambda;\ A)$, проведено не вполне четко. Последнее было отмечено Като. Доказательство, приведенное в этом параграфе, использует конструкцию, которую применил Като при модификации теоремы Троттера для случая B-пространств (доказательство Като не опубликовано).

13. Сопряженные полугруппы. Теорема Филлипса

Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X, и пусть $\{T_t;\ t\geqslant 0\}\subseteq L(X,\ X)$ — некоторая равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Тогда семейство $\{T_t^*;\ t\geqslant 0\}\subseteq L(X',\ X')$, где звездочкой обозначены сопряженные операторы, как это видно из теоремы 3 § 1 гл. VII, обладает полугрупповым свойством: $T_t^*\cdot T_s^*=T_{t+s}^*$, $T_0^*=I^*$ (I^* — тождественный оператор из $L(X',\ X')$). Но $\{T_t^*,\ t\geqslant 0\}$ может, вообще говоря, и не быть полугруппой класса (C_0). Дело в том, что отображение $T_t\to T_t^*$ не обязательно должно сохранять непрерывность по переменной t (см. предложение 1 § 1 гл. VII). Мы можем, однако, показать, что операторы семейства $\{T^*\}$ равностепенно непрерывны относительно значений $t\geqslant 0$.

Предложение 1. Если семейство $\{S_t;\ t\geqslant 0\}\subseteq L(X,\ X)$ равностепенно непрерывно относительно значений $t\geqslant 0$, то операторы $S_t^*\in\{S_t^*;\ t\geqslant 0\}\subseteq L(X',\ X')$ тоже равностепенно непрерывны относительно $t\geqslant 0$.

Доказательство. Из предположений теоремы следует, что множество $\bigcup_{t\geqslant 0}S_t\cdot B$ ограничено в пространстве X при любом выборе ограниченного множества $B\subseteq X$. Обозначим через U' и V' поляры множеств B и $\bigcup_{t\geqslant 0}S_t\cdot B$:

$$U'=\Big\{x'\in X';\ \sup_{b\in B}|\langle b,\ x'\rangle|\leqslant 1\Big\},\quad V'=\Big\{x'\in X';\ \sup_{b\in B,\ t\geqslant 0}|\langle S_tb,\ x'\rangle|\leqslant 1\Big\}.$$

Тогда U' и V' представляют собой некоторые окрестности вектора $x'=0$ пространства X'_s. Из неравенства $|\langle S_t b, x'\rangle| = |\langle b, S_t^* x'\rangle| \leqslant 1$ (при $b \in B$, $x' \in V'$) мы заключаем, что $S_t^* V' \subseteq U'$ для всех $t \geqslant 0$. Это и говорит о том, что семейство $\{S_t^*\}$ равностепенно непрерывно относительно значений $t \geqslant 0$.

Обозначим через A инфинитезимальный производящий оператор полугруппы T_t. Тогда $D(A)^a = X$, $R(A) \subseteq X$ и при $\lambda > 0$ существует резольвента $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)$, причем

$$\text{операторы } \{\lambda^m (\lambda I - A)^{-m}\} \text{ равностепенно непрерывны относительно значений } \lambda > 0 \text{ и } m = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Теперь мы можем доказать следующее

Предложение 2. При значениях $\lambda > 0$ существует резольвента $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ и

$$(\lambda I^* - A^*)^{-1} = \left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \tag{2}$$

(ср. с теоремой 2, гл. VIII, § 6).

Доказательство. Воспользуемся равенством $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$. Оператор $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \in L(X', X')$ существует, поскольку $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)$. Покажем, что оператор $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ существует и равен $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*$. Для этого допустим, что найдется такой элемент $x' \in X'$, что $(\lambda I^* - A^*)x' = 0$. Тогда $0 = \langle x, (\lambda I^* - A^*)x'\rangle = \langle (\lambda I - A)x, x'\rangle$ для всех $x \in D(A)$. Но $R(\lambda I - A) = X$, и поэтому мы видим, что $x' = 0$. Это означает, что оператор $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ существует. Для элементов $x \in X$, $x' \in D(A^*)$

$$\langle x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)^{-1} x, (\lambda I^* - A^*)x'\rangle.$$

Таким образом, мы имеем $D\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right) \supseteq R(\lambda I^* - A^*)$ и $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* (\lambda I^* - A^*)x' = x'$ для всякого $x' \in D(A^*)$. Отсюда следует, что $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \supseteq (\lambda I^* - A^*)^{-1}$. С другой стороны, если $x \in D(A)$ и $x' \in D\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right)$, то

$$\langle x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)x, \left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* x'\rangle.$$

Следовательно, $D(A^*) = D((\lambda I - A)^*) \supseteq R\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right)$ и $(\lambda I - A)^*\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* x' = x'$ при любом $x' \in D\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right)$, т. е. $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \subseteq (\lambda I^* - A^*)^{-1}$. Мы, таким образом, доказали утверждение (2).

Далее, имеет место

Теорема. Пусть пространство X', сильно сопряженное некоторому локально выпуклому секвенциально полному линейному топологическому пространству X, тоже секвенциально полно. Рассмотрим равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X,\ X)$ класса (C_0) с инфинитезимальным производящим оператором A. Обозначим через X^+ замыкание $D(A^*)^a$ области $D(A^*)$ в сильной топологии сопряженного пространства X'. Пусть T_t^+ — сужение оператора T_t^* на область X^+. Тогда $T_t^+ \in L(X^+,\ X^+)$ и операторы семейства $\{T_t^+;\ t \geqslant 0\}$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0), инфинитезимальный производящий оператор A^+ которой представляет собой наибольшее из сужений оператора A^* с областями определения и значений, принадлежащими пространству X^+.

Замечание. Р. Филлипс [2] доказал сформулированную выше теорему для частного случая B-пространства X. Приведенное здесь обобщение этого результата принадлежит Коматсу [4].

Доказательство теоремы. Используя равностепенную непрерывность семейства $\{\lambda^m R(\lambda;\ A)^m\}$ относительно значений $\lambda > 0$ и $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, а также резольвентное уравнение $R(\lambda;\ A) - R(\mu;\ A) = (\mu - \lambda) R(\lambda;\ A) R(\mu;\ A)$, мы на основании предложений 1 и 2 устанавливаем, что

$$(\lambda I^* - A^*)^{-1} - (\mu I^* - A^*)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I^* - A^*)^{-1} (\mu I^* - A^*)^{-1} \tag{3}$$

и что

операторы $\{\lambda^m (\lambda I^* - A^*)^{-m}\}$ равностепенно непрерывны относительно $\lambda > 0$ и $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. (4)

Поэтому, обозначая через $J(\lambda)$ сужение оператора $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ на область X^+, мы находим, что

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda) J(\lambda) J(\mu) \tag{3'}$$

и что

семейство $\{\lambda^m J(\lambda)^m\}$ равностепенно непрерывно относительно $\lambda > 0$ и $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. (4′)

Так как пространство X' секвенциально полно, то на основании (4′) мы аналогично тому, как это делалось в § 7 гл. IX, заключаем, что $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda J(\lambda) x = x$ при всех $x \in X^+$. Таким образом, $R(J(\lambda))^a = X^+$, и поэтому, согласно условию (7′), гл. VIII, § 4, $N(J(\lambda)) = \{0\}$. Отсюда вытекает, что псевдорезольвента $J(\lambda)$ должна быть резольвентой некоторого замкнутого линейного оператора A^+, заданного в пространстве X^+. Поскольку X^+ секвенциально полно и выполняется требование (4′), A^+ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) операторов $T_t^+ \in L(X^+,\ X^+)$. Для любых элементов $x \in X$ и $y' \in X^+$

$$\langle (I - m^{-1}tA)^{-m} x, y' \rangle = \langle x, (I^* - m^{-1}tA^+)^{-m} y' \rangle,$$

и поэтому на основании результатов предыдущего параграфа, устремляя $m \to \infty$, мы устанавливаем равенство $\langle T_t x, y' \rangle = \langle x, T_t^+ y' \rangle$. Значит, $T_t^* y' = T_t^+ y'$, а это и показывает, что оператор T_t^+ является сужением оператора T_t^* на область X^+.

В заключение покажем, что A^+ служит наибольшим из сужений оператора A^*, области определения и значений которых принадлежат X^+. Из проведенного выше построения оператора A^+ видно, что он представляет собой сужение оператора A^*. Допустим, что $x' \in D(A^*)$ и что $x' \in X^+$, $A^* x' \in X^+$. Тогда $(\lambda I^* - A^*) x' \in X^+$ и, следовательно, $(\lambda I^* - A^+)^{-1} (\lambda I^* - A^*) x' = x'$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $(\lambda I^* - A^+)$, мы находим, что $A^* x' = A^+ x'$. Это говорит о том, что A^+ является наибольшим из всех сужений оператора A^*, области определения и области значений которых принадлежат пространству X^+.