ГЛАВА X

Вполне непрерывные операторы

Пусть X и Y — комплексные B-пространства и S — единичный шар пространства X. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется ***вполне непрерывным***, если образ TS шара S относительно бикомпактен в пространстве Y. Для вполне непрерывных операторов удается получить полное решение задачи о собственных значениях; классическая теория Фредгольма, относящаяся к линейным интегральным уравнениям, переносится на линейное функциональное уравнение $Tx - \lambda x = y$ с комплексным параметром λ. В этой главе мы изложим теорию вполне непрерывных операторов, следуя работам Рисса [2] и Шаудера [1].

1. Бикомпактные множества в B-пространствах

Всякое бикомпактное множество в линейном топологическом пространстве должно быть ограниченным. Обратное, вообще говоря, неверно; мы знаем (гл. III, § 2), что замкнутый единичный шар нормированного линейного пространства X сильно бикомпактен тогда и только тогда, когда пространство X конечномерно. Пусть S — бикомпактное метрическое пространство S, и пусть $C(S)$ — это B-пространство всех вещественных или комплексных непрерывных функций $x(s)$ на S с нормой $\|x\| = \sup\limits_{s \in S} |x(s)|$. Мы знаем (гл. III, § 3), что подмножество $\{x_\alpha(s)\} \subset C(S)$ сильно относительно бикомпактно в $C(S)$ тогда и только тогда, когда функции $x_\alpha(s) \subseteq \{x_\alpha(s)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны (относительно α). Для пространства $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$, $1 \leqslant p < \infty$, имеет место следующая

Теорема (Фреше — Колмогоров). Пусть S — вещественная прямая, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра бэровских подмножеств B пространства S и $m(B) = \int\limits_B dx$ — обычная мера Лебега множества B. Тогда подмножество K пространства $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ сильно относительно бикомпактно в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$\sup_{x \in K} \| x \| = \sup_{x \in K} \left(\int_S | x(s) |^p \, ds \right)^{1/p} < \infty, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0} \int_S | x(t+s) - x(s) |^p \, ds = 0 \text{ равномерно по } x \in K, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha \uparrow \infty} \int_{|s| > \alpha} |x(s)|^p \, ds = 0 \text{ равномерно по } x \in K. \tag{3}$$

Доказательство. Допустим, что множество K сильно относительно бикомпактно. Тогда K ограничено, и поэтому условие (1) выполняется. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется конечная система функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, принадлежащих L^p, такая, что для всякой функции $f \in K$ существует индекс j, при котором $\| f - f_j \| \leqslant \varepsilon$. В противном случае можно было бы построить бесконечную последовательность $\{f_j\} \subseteq K$, удовлетворяющую неравенствам $\| f_j - f_i \| > \varepsilon$ при $j \neq i$, что противоречит относительной бикомпактности множества K. Исходя из определения интеграла Лебега, выберем систему $g_1, g_2, \ldots, g_n$ простых функций, таких, что $\| f_j - g_j \| \leqslant \varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Так как всякая простая функция $g_j(x)$ обращается в нуль вне некоторого достаточно большого интервала, мы для достаточно больших значений α имеем

$$\left(\int_\alpha^\infty | f(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | f(s) |^p \, ds \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\alpha^\infty | f(s) - g_j(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | f(s) - g_j(s) |^p \, ds \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_\alpha^\infty | g_j(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | g_j(s) |^p \, ds \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \| f - g_j \| + \left(\int_\alpha^\infty | g_j(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | g_j(s) |^p \, ds \right)^{1/p}.$$

Отсюда вытекает условие (3), так как $\| f - g_j \| \leqslant \| f - f_j \| + \| f_j - g_j \| \leqslant 2\varepsilon$. Доказательство условия (2) опирается на тот известный факт, что для характеристической функции $C_I(s)$ конечного интервала I справедливо равенство $\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} | C_I(s+t) - C_I(s) |^p \, ds = 0$ (§ 3 введения). Последнее означает, что условие (2) выполняется для простых функций $g_j(s)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, для любой функции $f \in K$

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f_j(s+t)|^p\,ds\right)^{1/p}+$$

$$+\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_j(s+t)-g_j(s+t)|^p\,ds\right)^{1/p}+$$

$$+\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g_j(s+t)-g_j(s)|^p\,ds\right)^{1/p}+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g_j(s)-f_j(s)|^p\,ds\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_j(s)-f(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\leqslant\varepsilon+\varepsilon+0+\varepsilon+\varepsilon,$$

если функция f_j выбрана так, что $\|f-f_j\|\leqslant\varepsilon$. Это неравенство доказывает условие (2).

Перейдем к доказательству достаточности. Определим оператор сдвига T_t равенством $(T_tf)(s)=f(t+s)$. Условие (2) означает, что $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0}T_tf=f$ равномерно в области $f\in K$. Определим среднее значение формулой $(M_af)(s)=(2a)^{-1}\int\limits_{-a}^{a}(T_tf)(s)\,dt$. Используя неравенство Гёльдера и теорему Фубини — Тонелли, мы приходим к неравенству

$$\|M_af-f\|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-a}^{a}(2a)^{-1}|f(s+t)-f(s)|\,dt\right\}^p ds\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant(2a)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-a}^{a}|f(s+t)-f(s)|^p\,dt\cdot(2a)^{p/p'}\,ds\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left((2a)^{-1}\int_{-a}^{a}dt\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f(s)|^p\,ds\right)^{1/p},\quad\text{если}\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Таким образом,

$$\|M_af-f\|\leqslant\sup_{|t|\leqslant a}\|T_tf-f\|,$$

и, следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{a\downarrow 0}M_af=f$ равномерно в области $f\in K$. Итак, достаточно доказать относительную бикомпактность множества $\{M_af;\ f\in K\}$ для достаточно малого фиксированного $a>0$.

Покажем, что при фиксированном $a>0$ функции семейства $\{(M_af)(s);\ f\in K\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Как и выше, мы имеем

$$|(M_af)(s_1)-(M_af)(s_2)|\leqslant(2a)^{-1}\int_{-a}^{a}|f(s_1+t)-f(s_2+t)|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\left((2a)^{-1}\int_{-a}^{a}|f(s_1+t)-f(s_2+t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Это неравенство и условие (2) показывают, что функции семейства $\{(M_af)(s);\ f\in K\}$ равностепенно непрерывны при фиксированном $a>0$. Равномерная ограниченность доказывается аналогично. Таким образом, по теореме Арцела — Асколи для любых $a>0$, $\alpha>0$ и $\varepsilon>0$ можно указать конечное число функций $M_af_1, M_af_2, \ldots, M_af_n$, где $f_j\in K$ ($j=1, 2, \ldots, n$), таких, что для всякой функции $f\in K$ найдется номер j, при котором $\sup\limits_{|s|\leqslant\alpha}|(M_af)(s)-(M_af_j)(s)|<\varepsilon$. Норма $\|M_af-M_af_j\|$ удовлетворяет неравенству

$$\|M_af-M_af_j\|^p\leqslant\int_{-\alpha}^{\alpha}|(M_af)(s)-(M_af_j)(s)|^p\,ds+$$
$$+\int_{|s|>\alpha}|(M_af)(s)-(M_af_j)(s)|^p\,ds. \qquad (4)$$

Согласно неравенству Минковского, второе слагаемое в правой части не превосходит

$$\left(\|M_af-f\|+\left(\int_{|s|>\alpha}|f(s)-f_j(s)|^p\,ds\right)^{1/p}+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{|s|>\alpha}|f_j(s)-(M_af_j)(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\right)^p.$$

Величина $\|M_af-f\|$ сколь угодно мала при достаточно малом $a>0$, и в силу условия (3) интегралы $\int\limits_{|s|>\alpha}|f(s)-f_j(s)|^p\,ds$ и $\int\limits_{|s|>\alpha}|f_j(s)-(M_af_j)(s)|^p\,ds$ могут быть сделаны сколь угодно малыми для достаточно больших значений $\alpha>0$, если $a>0$ ограничено. Первый член в правой части неравенства (4) при соответствующем значении индекса j не превосходит $2\alpha\varepsilon^p$. Указанные оценки равномерны относительно $f\in K$. Отсюда следует, что множество $\{M_af;\ f\in K\}$ относительно бикомпактно в пространстве L^p при достаточно малом $a>0$.