2. Вполне непрерывные операторы и ядерные операторы

Определение 1. Пусть X, Y — два B-пространства и S — единичный шар в X. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется *вполне непрерывным*, если образ $T \cdot S$ шара S относительно бикомпактен в пространстве Y.

Пример 1. Пусть $K(x, y)$ — вещественная или комплексная непрерывная функция, заданная в области $-\infty < a \leqslant x, y \leqslant b < \infty$. *Интегральный оператор* K вида

$$(Kf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \qquad (1)$$

вполне непрерывен как оператор, принадлежащий $L(C[a, b], C[a, b])$.

Доказательство. Ясно, что K отображает $C[a, b]$ в $C[a, b]$. Положим $\sup\limits_{x, y} |K(x, y)| = M$. Тогда $\|Kf\| \leqslant (b-a) M \|f\|$, т. е. функции, принадлежащие множеству KS, равномерно ограничены. Согласно неравенству Шварца,

$$|(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)|^2 \leqslant \int_a^b |K(x_1, y) - K(x_2, y)|^2 dy \cdot \int_a^b |f(y)|^2 dy,$$

откуда видно, что функции, образующие множество KS, равностепенно непрерывны, т. е.

$\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \sup\limits_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| = 0$ равномерно в области $f \in S$

Таким образом, по теореме Асколи — Арцела (гл. III, § 3), множество KS относительно бикомпактно в пространстве $C[a, b]$.

Пример 2. Пусть вещественная или комплексная функция $K(x, y)$, заданная на множестве $(S, \mathfrak{B}, m) \times (S, \mathfrak{B}, m)$, где $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой, $\mathfrak{B}$-измерима по каждому из аргументов x и y, причем

$$\int_S \int_S |K(x, y)|^2 m(dx) m(dy) < \infty. \qquad (2)$$

Такая функция K называется *ядром Гильберта — Шмидта*. Определим *интегральный оператор Гильберта — Шмидта*

$$(Kf)(x) = \int_S K(x, y) f(y) m(dy), \qquad f \in L^2(S) = L^2(S, \mathfrak{B}, m), \qquad (3)$$

принадлежащий $L(L^2(s), L^2(S))$. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта вполне непрерывен.

Доказательство. Выберем из единичного шара пространства $L^2(S)$ произвольную последовательность $\{f_n\}$. Мы должны показать, что последовательность $\{Kf_n\}$ относительно бикомпактна в $L^2(S)$. Поскольку ограниченные множества гильбертова пространства $L^2(S)$ слабо секвенциально компактны, мы можем без ограничения общности считать, что $\{f_n\}$ слабо сходится к некоторому элементу $f \in L^2(S)$; в противном случае можно выбрать подходящую подпоследовательность. Согласно условию (2) и теореме Фубини—Тонелли, мы имеем

$$\int_S |K(x, y)|^2 m(dy) < \infty \quad \text{для } m\text{-почти всех } x \in S.$$

Следовательно, для таких x

$$\lim_{n\to\infty} (Kf_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S K(x, y) f_n(y) m(dy) = \lim_{n\to\infty} (f_n(\cdot), \overline{K(x, \cdot)}) = \\ = (f(\cdot), \overline{K(x, \cdot)}) = \int_S K(x, y) f(y) m(dy);$$

с другой стороны, согласно неравенству Шварца,

$$|(Kf_n)(x)|^2 \leqslant \int_S |K(x, y)|^2 m(dy) \int_S |f_n(y)|^2 m(dy) \leqslant \\ \leqslant \int_S |K(x, y)|^2 m(dy) \quad \text{для } m\text{-почти всех } x \in S. \tag{4}$$

Следовательно, по лемме Лебега—Фату $\lim_{n\to\infty} \int_S |(Kf_n)(x)|^2 m(dx) = \int_S |(Kf)(x)|^2 m(dx)$. Если мы покажем теперь, что $w\text{-}\lim_{n\to\infty} Kf_n = Kf$, то, согласно теореме 8 гл. V, § 1, отсюда и из полученного выше будет следовать, что $s\text{-}\lim_{n\to\infty} Kf_n = Kf$. Как и в случае (4), для любой функции $h \in L^2(S)$ выполняется неравенство

$$\int_S |(Kh)(x)|^2 m(dx) \leqslant \int_S \int_S |K(x, y)|^2 m(dy) m(dx) \cdot \int_S |h(y)|^2 m(dy),$$

и поэтому

$$\|K\| \leqslant \left(\int_S \int_S |K(x, y)|^2 m(dx) m(dy)\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Таким образом, из условия $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ мы получаем $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Kf_n = Kf$, так как для любой функции $g \in L^2(S)$

$$\lim_{n\to\infty}(Kf_n,\ g) = \lim_{n\to\infty}(f_n,\ K^*g) = (f,\ K^*g) = (Kf,\ g)\,^{1)}.$$

Теорема. (1°) Линейная комбинация вполне непрерывных операторов представляет собой вполне непрерывный оператор. (2°) Произведение вполне непрерывного оператора и ограниченного линейного оператора (при любом порядке сомножителей) является вполне непрерывным оператором. Иными словами, множество вполне непрерывных операторов, принадлежащих $L(X,\ X)$, образует замкнутый двусторонний идеал алгебры операторов $L(X,\ X)$. (3°) Если последовательность $\{T_n\} \subset L(X,\ Y)$ вполне непрерывных операторов сходится в равномерной операторной топологии к некоторому оператору T, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\|T - T_n\| = 0$, то оператор T вполне непрерывен.

Доказательство. Утверждение (1°) и первая часть утверждения (2°) следуют непосредственно из определения вполне непрерывного оператора. Замкнутость идеала вполне непрерывных операторов алгебры $L(X,\ X)$ в равномерной операторной топологии вытекает из (3°).

Докажем (3°). Выберем из замкнутого единичного шара S пространства X произвольную последовательность $\{x_h\}$. Так как операторы T_n вполне непрерывны, мы можем при помощи диагонального процесса построить такую подпоследовательность $\{x_{h'}\}$, что предел $s\text{-}\lim\limits_{h'\to\infty} T_n x_{h'}$ существует для каждого фиксированного n. Тогда

$$\|Tx_{h'} - Tx_{k'}\| \leqslant \|Tx_{h'} - T_n x_{h'}\| + \|T_n x_{h'} - T_n x_{k'}\| +$$
$$+ \|T_n x_{k'} - Tx_{k'}\| \leqslant \|T - T_n\| + \|T_n x_{h'} - T_n x_{k'}\| + \|T_n - T\|,$$

и поэтому $\overline{\lim\limits_{h',\,k'\to\infty}}\ \|Tx_{h'} - Tx_{k'}\| \leqslant 2\,\|T - T_n\|$. Значит, последовательность $\{Tx_{k'}\}$ элементов B-пространства Y фундаментальна, что и доказывает утверждение (3°).

Ядерные операторы. Рассмотрим приложение доказанной теоремы к ядерным операторам, введенным Гротендиком [2].

Определение 2. Пусть $X,\ Y$ — два B-пространства и оператор T принадлежит $L(X,\ Y)$. Если существуют последовательности $\{f'_n\} \subseteq X'$, $\{y_n\} \subseteq Y$ и последовательность чисел $\{c_n\}$, такие, что

$$\sup_n \|f'_n\| < \infty, \quad \sup_n \|y_n\| < \infty, \quad \sum_n |c_n| < \infty$$
$$\text{и}\quad Tx = s\text{-}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} c_n \langle x,\ f'_n\rangle\, y_n \quad \text{при всяком } x \in X, \tag{6}$$

[1]) Через K^* здесь обозначен интегральный оператор с ядром $K^*(x,\ y) = \overline{K(y,\ x)}$, сопряженный оператору K. — *Прим. перев.*

то оператор T называется ***ядерным оператором***, отображающим X в Y.

Замечание. Существование предела, указанного в условии (6), очевидно, так как

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} c_j \langle x, f_j' \rangle y_j \right\| \leqslant \sum_{j=n}^{m} |c_j| \cdot \|x\| \cdot \|f_j'\| \cdot \|y_j\| \leqslant \text{const} \sum_{j=n}^{m} |c_j| \cdot \|x\|.$$

Условие ядерности (6) требует, чтобы $s\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} c_n \langle x, f_n' \rangle y_n$ был равен Tx для каждого фиксированного элемента $x \in X$.

Предложение. Ядерный оператор T вполне непрерывен.

Доказательство. Определим оператор T_n формулой

$$T_n x = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x, f_j' \rangle y_j. \tag{7}$$

Так как его область значений $R(T_n)$ конечномерна, то, применяя теорему Больцано — Вейерштрасса, нетрудно показать, что оператор T_n вполне непрерывен. Кроме того, из (6) и неравенства

$$\|Tx - T_n x\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j \langle x, f_j' \rangle y_j \right\| \leqslant \text{const} \sum_{j=n+1}^{\infty} |c_j| \cdot \|x\|$$

видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$, и поэтому оператор T должен быть вполне непрерывным.

Пример ядерного оператора. Пусть G — ограниченная открытая область пространства R^n; рассмотрим гильбертово пространство $H_0^k(G)$. Пусть $(k - j) > n$. Тогда отображение

$$H_0^k(G) \ni \varphi \to \varphi \in H_0^j(G) \tag{8}$$

определяется ядерным оператором, принадлежащим $L(H_0^h(G), H_0^j(G))$.

Доказательство. Мы можем допустить, что область G содержится внутри прямоугольного параллелепипеда P:

$$0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Напомним, что $H_0^k(G)$ — это пополнение пространства $\hat{H}_0^k(G) = C_0^k(G)$ по норме $\|\varphi\|_k = \left(\sum\limits_{|s| \leqslant k} \int\limits_G |D^s \varphi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$ (см. гл. I, § 10). Продолжим функции, принадлежащие $\hat{H}_0^k(G)$, на все пространство R^n, полагая их равными нулю в области $P - G$, так, чтобы они были периодическими с периодом 2π по каждой из переменных x_s. Функции

$$f_\beta(x) = (2\pi)^{-n/2}\exp(i\beta x), \tag{9}$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — набор из n целых чисел и $\beta x = \sum_{s=1}^{n} \beta_s x_s$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2(P) = H_0^0(P)$. Обозначим через $D^s\varphi$ $\left(\varphi \in H_0^k(G)\right)$ обобщенные производные. При $|s| \leqslant k$ разложение Фурье для функций $D^s\varphi(x)$ $\left(\varphi \in \hat{H}_0^k(G)\right)$ в пространстве $L^2(P)$ имеет вид

$$D^s\varphi(x) = \sum_\beta (D^s\varphi,\ f_\beta)_0 f_\beta, \text{ где } (\psi,\ f_\beta)_0 = \int_P \psi(x)\overline{f_\beta(x)}\,dx. \tag{10}$$

Используя формулу

$$(D^s\varphi,\ f_\beta)_0 = (-1)^{|s|}(\varphi,\ D^s f_\beta)_0 = \prod_{m=1}^{n} (i\beta_m)^{s_m}(\varphi,\ f_\beta)_0$$

и равенство Парсеваля

$$\sum_\beta |(D^s\varphi,\ f_\beta)_0|^2 = \int_P |D^s\varphi(x)|^2\,dx \leqslant \|\varphi\|_k^2 \qquad (|s| \leqslant k),$$

мы получаем неравенство

$$\left|\left(\varphi,\ (1+|\beta|^2)^{k/2} f_\beta\right)_0\right|^2 \leqslant \text{const} \sum_{|s| \leqslant k} |(D^s\varphi,\ f_\beta)_0|^2 \leqslant \text{const}\,\|\varphi\|_k^2.$$

Следовательно, функционал $f'_\beta \in H_0^k(G)'$, определяемый соотношением

$$\langle\varphi,\ f'_\beta\rangle = (\varphi,\ (1+|\beta|^2)^{k/2} f_\beta)_0,$$

удовлетворяет условию $\sup_\beta \|f'_\beta\| < \infty$. Кроме того, для функционалов

$$y_\beta = (1+|\beta|^2)^{-j/2} f_\beta$$

выполняется условие $\sup_\beta \|y_\beta\|_j < \infty$, так как $D^s f_\beta = \prod_{t=1}^{n} (i\beta_t)^{s_t} f_\beta$. Ввиду того что для положительных целых чисел β_s при условии

$(k-j)/n > 1$ имеет место неравенство

$$\sum_\beta \frac{1}{(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)^{k-j}} = \sum_\beta \left(\frac{1}{(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)^n}\right)^{(k-j)/n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\beta \left(\frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\right)^{(k-j)/n} =$$

$$= \sum_{\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1}\right)^{(k-j)/n} \sum_{\beta_2}\left(\frac{1}{\beta_2}\right)^{(k-j)/n} \ldots \sum_{\beta_n}\left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{(k-j)/n} < \infty,$$

справедлива оценка

$$\sum_\beta |c_\beta| < \infty, \quad \text{где } c_\beta = (1+|\beta|^2)^{(j-k)/2}.$$

Таким образом, мы получили разложение Фурье

$$\varphi = \sum_\beta c_\beta \langle \varphi, f'_\beta\rangle y_\beta,$$

что завершает доказательство.

Замечание. Если для заданного ограниченного линейного оператора $K \in L(L^2(S), L^2(S))$ существует полная ортонормированная система собственных функций $\{\varphi_j\}$, удовлетворяющих уравнениям $K\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то из разложения Фурье

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)\varphi_j, \qquad f \in L^2(S),$$

вытекает, что

$$Kf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

Таким образом, если все собственные значения $\lambda_j > 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty$, то из написанного выше представления видно, что оператор K ядерный. Поскольку $\lambda_j = (K\varphi_j, \varphi_j)$, то возникает вопрос о сходимости ряда вида $\sum_{j=1}^{\infty} |K\varphi_j, \varphi_j|$. Если K — интегральный оператор, определенный ядром

$$K(x, y) = \int_S \overline{K_2(z, x)} K_1(z, y)\, m(dz),$$

где $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ — ядра типа Гильберта — Шмидта, то условие $\sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \varphi_j)| < \infty$ выполняется. Действительно, в этом случае

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j,\ \varphi_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} |(K_2^* K_1\varphi_j,\ \varphi_j)| =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} |(K_1\varphi_j,\ K_2\varphi_j)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|K_1\varphi_j\|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|K_2\varphi_j\|^2\right)^{1/2}.$$

Используя равенство Парсеваля, мы получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|K_1\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_S \left| \int_S K_1(z,\ y)\varphi_j(y)\, m(dy)\right|^2 m(dz) =$$
$$= \int_S \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_S K_1(z,\ y)\varphi_j(y)\, m(dy)\right|^2 m(dz) =$$
$$= \int_S \left\{ \int_S |K_1(z,\ y)|^2\, m(dy)\right\} m(dz) < \infty.$$

Аналогично $\sum_{j=1}^{\infty} \|K_2\varphi_j\|^2 < \infty$, откуда следует, что $\sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j,\ \varphi_j)| < \infty$.

Для ограниченного линейного оператора K, определенного в сепарабельном гильбертовом пространстве X и удовлетворяющего условию $\sup_{\{\varphi_j\},\ \{\psi_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j,\ \psi_j)| < \infty$, где $\{\varphi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ — произвольные полные ортонормированные системы пространства X, величина $\sup_{\{\varphi_j\},\ \{\psi_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j,\ \psi_j)|$ называется *следовой нормой*. Если оператор K с неотрицательными собственными значениями при любом выборе ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}$ пространства X удовлетворяет условию $\sum_{j=1}^{\infty} (K\varphi_j,\ \varphi_j) < \infty$, то K называется *оператором с конечным следом*[1]). По общей теории операторов указанных типов и ядерных операторов см. работы Гельфанда — Виленкина [3] и Шаттена [1].

---

[1]) Числа $c_{ik} = (K\varphi_i,\ \varphi_k)$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots)$, где $\{\varphi_j\}$ — ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства X, образуют (по определению) матрицу оператора K в базисе $\{\varphi_j\}$. Величина $\sum_{j=1}^{\infty} (K\varphi_j,\ \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{jj} < \infty$ называется *следом* матрицы оператора K с конечным следом. — *Прим. перев.*