3. Теорема Реллиха — Гординга

Теорема (Гординг [1]). Пусть G — ограниченная открытая область пространства R^n. Если оператор $T \in L(H_0^k(G), H_0^k(G))$ при $j < k$ удовлетворяет неравенству

$$\|T\varphi\|_k \leqslant C\|\varphi\|_j \text{ для всех } \varphi \in H_0^k(G), \quad \text{где } C > 0 \text{ — некоторая постоянная,} \tag{1}$$

то он вполне непрерывен как оператор, принадлежащий $L(H_0^k(G), H_0^k(G))$.

Доказательство. Из определения пространства $H_0^k(G)$ (гл. I, § 10) вытекает, что достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения: если для некоторой последовательности $\{\varphi_\nu\} \subseteq \hat{H}_0^k(G) = C_0^k(G)$ выполняется неравенство $\|\varphi_\nu\|_k \leqslant 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, то последовательность $\{T\varphi_\nu\}$ содержит подпоследовательность, сильно сходящуюся в пространстве $H_0^k(G)$. Преобразование Фурье $\hat{\varphi}_\nu(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_G \varphi_\nu(x) \exp(-ix\xi)\, dx$, согласно неравенству Шварца, удовлетворяет условию

$$|\hat{\varphi}_\nu(\xi)|^2 \leqslant (2\pi)^{-n} \int\limits_G dx \int\limits_G |\varphi_\nu(x)|^2 dx \leqslant (2\pi)^{-n} \int\limits_G dx,$$

и, следовательно, функции $\{\hat{\varphi}_\nu(\xi)\}$ равномерно ограничены относительно $\xi \in R^n$ и $\nu = 1, 2, \ldots$. Так как нормы $\|\varphi_\nu\|_0$ ограничены в совокупности, мы можем считать, что некоторая подпоследовательность $\{\varphi_{\nu'}\}$ слабо сходится в пространстве $L^2(G) = H_0^0(G)$. Для всякого фиксированного $\xi \in R^n$ функция $\exp(-ix\xi)$ принадлежит $L^2(G)$, поэтому последовательность ограниченных функций $\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) = (\varphi_{\nu'}, (2\pi)^{-n/2} \exp(-ix\xi))_0$ сходится в каждой точке ξ. Отсюда, учитывая условие (1) и равенство Парсеваля для преобразования Фурье (гл. VI, § 2), мы получаем

$$\|T\varphi_{\nu'} - T\varphi_{\mu'}\|_k^2 = \|T(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'})\|_k^2 \leqslant C^2 \|\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}\|_j^2 =$$

$$= C^2 \sum_{|s| \leqslant j} \|D^s(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'})\|_0^2 = C^2 \sum_{|s| \leqslant j} \|\widehat{(D^s(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}))}\|_0^2 =$$

$$= C^2 \sum_{|s| \leqslant j} \left\| \prod_{t=1}^n (i\xi_t)^{s_t} (\hat{\varphi}_{\nu'} - \hat{\varphi}_{\mu'})(\xi) \right\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{|s| \leqslant j} \int_{|\xi| \leqslant r} \left| \prod_{t=1}^{n} \xi_t^{s_t} (\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)) \right|^2 d\xi +$$

$$+ C^2 C_1 \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2j} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi,$$

где C_1 — положительная постоянная. При всяком фиксированном $r > 0$ первое слагаемое в правой части стремится к нулю, когда ν', $\mu' \to \infty$ — это вытекает из леммы Лебега — Фату. Второй член в правой части при $r > 1$ не превосходит выражения

$$C^2 C_1 r^{2j-2k} \int_{|\xi| > r} |\xi|^{2k} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 C_1 r^{2j-2k} \int_{R^n} |\xi|^{2k} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \sum_{|s| \leqslant k} \|(\widehat{D^s \varphi_{\nu'} - D^s \varphi_{\mu'}})\|_0^2 =$$

$$= C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \sum_{|s| \leqslant k} \| D^s (\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}) \|_0^2 =$$

$$= C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \| \varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'} \|_k^2 \leqslant 4 C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k},$$

где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная. При $j < k$ последний член стремится к нулю, когда $r \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{\nu', \mu' \to \infty} \| T\varphi_{\nu'} - T\varphi_{\mu'} \|_k = 0.$$

Теорема доказана.

4. Теорема Шаудера

Теорема (Шаудер). Оператор $T \in L(X, Y)$ вполне непрерывен тогда и только тогда, когда он обладает вполне непрерывным сопряженным оператором T'.

Доказательство. Пусть S, S' — замкнутые единичные шары соответственно в пространствах X и Y'. Допустим, что оператор $T \in L(X, Y)$ вполне непрерывен. Выберем из множества S' произвольную последовательность $\{y'_j\}$. Функции $F_j(y) = \langle y, y'_j \rangle$ $(y \in Y)$ равностепенно непрерывны в том смысле, что

$$|F_j(y) - F_j(z)| = |\langle y - z, y'_j \rangle| \leqslant \| y - z \| \qquad (y, z \in Y).$$

Кроме того, на любом ограниченном множестве значений y функции $F_j(y) \in \{F_j(y)\}$ равномерно ограничены относительно j, так как