$$\leqslant C^2 \sum_{|s|\leqslant j} \int_{|\xi|\leqslant r} \left| \prod_{t=1}^{n} \xi_t^{s_t} (\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)) \right|^2 d\xi +$$

$$+ C^2 C_1 \int_{|\xi|>r} |\xi|^{2j} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi,$$

где C_1 — положительная постоянная. При всяком фиксированном $r > 0$ первое слагаемое в правой части стремится к нулю, когда ν', $\mu' \to \infty$ — это вытекает из леммы Лебега — Фату. Второй член в правой части при $r > 1$ не превосходит выражения

$$C^2 C_1 r^{2j-2k} \int_{|\xi|>r} |\xi|^{2k} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 C_1 r^{2j-2k} \int_{R^n} |\xi|^{2k} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \sum_{|s|\leqslant k} \| (\widehat{D^s \varphi_{\nu'} - D^s \varphi_{\mu'}}) \|_0^2 =$$

$$= C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \sum_{|s|\leqslant k} \| D^s (\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}) \|_0^2 =$$

$$= C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \| \varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'} \|_k^2 \leqslant 4 C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k},$$

где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная. При $j < k$ последний член стремится к нулю, когда $r \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{\nu', \mu' \to \infty} \| T\varphi_{\nu'} - T\varphi_{\mu'} \|_k = 0.$$

Теорема доказана.

4. *Теорема Шаудера*

Теорема (Шаудер). Оператор $T \in L(X, Y)$ вполне непрерывен тогда и только тогда, когда он обладает вполне непрерывным сопряженным оператором T'.

Доказательство. Пусть S, S' — замкнутые единичные шары соответственно в пространствах X и Y'. Допустим, что оператор $T \in L(X, Y)$ вполне непрерывен. Выберем из множества S' произвольную последовательность $\{y'_j\}$. Функции $F_j(y) = \langle y, y'_j \rangle$ $(y \in Y)$ равностепенно непрерывны в том смысле, что

$$|F_j(y) - F_j(z)| = |\langle y - z, y'_j \rangle| \leqslant \| y - z \| \qquad (y, z \in Y).$$

Кроме того, на любом ограниченном множестве значений y функции $F_j(y) \in \{F_j(y)\}$ равномерно ограничены относительно j, так как

$|F_j(y)|\leqslant\|y\|$. К последовательности $\{F_j(y)\}$ функций, определенных на бикомпактном множестве $(T\cdot S)^a$, можно применить теорему Асколи — Арцела, согласно которой существует подпоследовательность $\{F_{j'}(y)\}$, равномерно сходящаяся в области $y\in(T\cdot S)^a$. Таким образом, поскольку $F_{j'}(Tx)=\langle Tx,\ y'_{j'}\rangle=\langle x,\ T'y'_{j'}\rangle$, последовательность $\{\langle x,\ T'y'_{j'}\rangle\}$ равномерно сходится на шаре $x\in S$, и поэтому последовательность $\{T'\cdot y'_{j'}\}$ сходится в сильной топологии пространства X'. Тем самым доказано, что оператор T' вполне непрерывен.

Обратно, пусть T' — вполне непрерывный оператор. Тогда по доказанному выше оператор T'' вполне непрерывен. Поэтому множество $T''\cdot S''$, где S'' — замкнутый единичный шар в пространстве X'', относительно бикомпактно. Мы знаем, что пространство Y может быть изометрически вложено в Y'' (теорема 2 гл. IV, § 8). Отождествляя Y с образом в Y'' при этом вложении, мы видим, что $T\cdot S\subseteq T''\cdot S''$. Значит, множество $T\cdot S$ относительно бикомпактно в сильной топологии Y'', а поэтому и в сильной топологии пространства Y. Итак, мы показали, что оператор T вполне непрерывен.

5. Теория Рисса — Шаудера

Для дальнейшего рассмотрения потребуется следующая

Лемма (Рисс [2]). Пусть вполне непрерывный оператор V принадлежит $L(X,\ X)$, где X — некоторое B-пространство. Тогда при любом комплексном $\lambda_0\neq 0$ область значений $R(\lambda_0 I-V)$ сильно замкнута.

Доказательство. Можно считать, что $\lambda_0=1$. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{y_n\}\subseteq R(I-V)$, пределом которой служит некоторый элемент $y\in X$. Последовательности $\{y_n\}$ соответствует последовательность $\{x_n\}\subseteq X$, такая, что $y_n=(I-V)x_n$. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, поскольку оператор V вполне непрерывен, найдется подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, для которой последовательность $\{Vx_{n'}\}$ сильно сходится. Так как $x_{n'}=y_{n'}+Vx_{n'}$, то последовательность $\{x_{n'}\}$ сходится к некоторому $x\in X$, и поэтому $y=(I-V)x\in R(I-V)$.

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, т. е. не ограничено множество $\{\|x_n\|\}$. Положим $T=(I-V)$ и введем последовательность чисел $\alpha_n=\operatorname{dis}(x_n,\ N(T))$, где $N(T)=\{x;\ Tx=0\}$. Выберем из множества $N(T)$ такие элементы w_n, что $\alpha_n\leqslant\|x_n-w_n\|\leqslant(1+n^{-1})\alpha_n$. Тогда $T(x_n-w_n)=Tx_n$, и поэтому, если последовательность $\{\alpha_n\}$ окажется ограниченной, мы сможем при помощи тех же рассуждений, что и выше, доказать включение $y\in R(T)=R(I-V)$. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$.