$|F_j(y)| \leqslant \|y\|$. К последовательности $\{F_j(y)\}$ функций, определенных на бикомпактном множестве $(T \cdot S)^a$, можно применить теорему Асколи — Арцела, согласно которой существует подпоследовательность $\{F_{j'}(y)\}$, равномерно сходящаяся в области $y \in (T \cdot S)^a$. Таким образом, поскольку $F_{j'}(Tx) = \langle Tx, y'_{j'} \rangle = \langle x, T'y'_{j'} \rangle$, последовательность $\{\langle x, T'y'_{j'} \rangle\}$ равномерно сходится на шаре $x \in S$, и поэтому последовательность $\{T' \cdot y'_{j'}\}$ сходится в сильной топологии пространства X'. Тем самым доказано, что оператор T' вполне непрерывен.

Обратно, пусть T' — вполне непрерывный оператор. Тогда по доказанному выше оператор T'' вполне непрерывен. Поэтому множество $T'' \cdot S''$, где S'' — замкнутый единичный шар в пространстве X'', относительно бикомпактно. Мы знаем, что пространство Y может быть изометрически вложено в Y'' (теорема 2 гл. IV, § 8). Отождествляя Y с образом в Y'' при этом вложении, мы видим, что $T \cdot S \subseteq T'' \cdot S''$. Значит, множество $T \cdot S$ относительно бикомпактно в сильной топологии Y'', а поэтому и в сильной топологии пространства Y. Итак, мы показали, что оператор T вполне непрерывен.

5. Теория Рисса — Шаудера

Для дальнейшего рассмотрения потребуется следующая

Лемма (Рисс [2]). Пусть вполне непрерывный оператор V принадлежит $L(X, X)$, где X — некоторое B-пространство. Тогда при любом комплексном $\lambda_0 \neq 0$ область значений $R(\lambda_0 I - V)$ сильно замкнута.

Доказательство. Можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{y_n\} \subseteq R(I - V)$, пределом которой служит некоторый элемент $y \in X$. Последовательности $\{y_n\}$ соответствует последовательность $\{x_n\} \subseteq X$, такая, что $y_n = (I - V)x_n$. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, поскольку оператор V вполне непрерывен, найдется подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, для которой последовательность $\{Vx_{n'}\}$ сильно сходится. Так как $x_{n'} = y_{n'} + Vx_{n'}$, то последовательность $\{x_{n'}\}$ сходится к некоторому $x \in X$, и поэтому $y = (I - V)x \in R(I - V)$.

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, т. е. не ограничено множество $\{\|x_n\|\}$. Положим $T = (I - V)$ и введем последовательность чисел $\alpha_n = \operatorname{dis}(x_n, N(T))$, где $N(T) = \{x; Tx = 0\}$. Выберем из множества $N(T)$ такие элементы w_n, что $\alpha_n \leqslant \|x_n - w_n\| \leqslant (1 + n^{-1})\alpha_n$. Тогда $T(x_n - w_n) = Tx_n$, и поэтому, если последовательность $\{\alpha_n\}$ окажется ограниченной, мы сможем при помощи тех же рассуждений, что и выше, доказать включение $y \in R(T) = R(I - V)$. Допустим, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \infty$.

Поскольку элементы $z_n = (x_n - w_n)/\|x_n - w_n\|$ удовлетворяют условиям $\|z_n\| = 1$ и $s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tz_n = 0$, можно, как и выше, показать, что найдется такая подпоследовательность $\{z_{n'}\}$, для которой $s\text{-}\lim_{n'\to\infty} z_{n'} = w_0$ и $s\text{-}\lim_{n'\to\infty} Tz_{n'} = 0$. Это означает, что $w_0 \in N(T)$. Если положить $u_n = z_n - w_0$, то в равенстве

$$x_{n'} - w_{n'} - w_0 \|x_{n'} - w_{n'}\| = u_{n'} \|x_{n'} - w_{n'}\|$$

второе и третье слагаемые левой части принадлежат $N(T)$, откуда $\|u_{n'}\| \cdot \|x_{n'} - w_{n'}\| \geqslant \alpha_{n'}$. Но это приводит к противоречию, так как $s\text{-}\lim_{n'\to\infty} u_{n'} = 0$, $\|x_n - w_n\| \leqslant (1 + n^{-1})\alpha_n$ и $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.

Теперь мы можем перейти к изложению *теории Рисса — Шаудера*. Сформулируем результаты этой теории в виде трех теорем.

Теорема 1. Рассмотрим вполне непрерывный оператор $V \in L(X, X)$. Если $\lambda_0 \neq 0$ не является собственным значением V, то λ_0 принадлежит резольвентному множеству оператора V.

Доказательство. По доказанной выше лемме и условиям теоремы оператор $T_{\lambda_0} = (\lambda_0 I - V)$ осуществляет взаимно однозначное отображение пространства X на множество $R(T_{\lambda_0})$, сильно замкнутое в X. Поэтому, согласно следствию теоремы об открытости отображения из § 5 гл. II, оператор T_{λ_0} имеет непрерывный обратный. Покажем, что $R(T_{\lambda_0}) = X$. Допустим противное, тогда топологический образ $X_1 = T_{\lambda_0}X$ пространства X будет замкнутым собственным подпространством в X. Построим последовательность $X_2 = T_{\lambda_0}X_1$, $X_3 = T_{\lambda_0}X_2, \ldots$; тогда X_{n+1} представляет собой замкнутое собственное подпространство в X_n ($X_0 = X$; $n = 0, 1, 2, \ldots$). По теореме Рисса из гл. III, § 2 в этом случае должна существовать такая последовательность $\{y_n\}$, что $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dis}(y_n, X_{n+1}) \geqslant 1/2$. Поэтому если $n > m$, то

$$\lambda_0^{-1}(Vy_m - Vy_n) = y_m + \{-y_n - (T_{\lambda_0}y_m - T_{\lambda_0}y_n)/\lambda_0\} = y_m - y,$$

где

$$y = \{y_n + (T_{\lambda_0}y_m - T_{\lambda_0}y_n)/\lambda_0\} \in X_{m+1}.$$

Но тогда $\|Vy_n - Vy_m\| \geqslant |\lambda_0|/2$, что невозможно, так как оператор V вполне непрерывен.

Теорема 2. Пусть V — вполне непрерывный оператор, принадлежащий $L(X, X)$. Тогда (1) его спектр представляет собой не более чем счетное множество точек комплексной плоскости, не имеющее предельных точек, за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$; (2) каждое отличное от нуля число, принадлежащее спектру оператора V, является собственным значением V конечной кратности; (3) отличное от нуля число является собственным значением оператора V тогда и только тогда, когда оно одновременно является собственным значением сопряженного оператора V'.

Доказательство. По теореме 1 всякое отличное от нуля число, принадлежащее спектру оператора V, должно быть собственным значением V. То же самое верно и для сопряженного оператора V', так как по теореме Шаудера оператор V' вполне непрерывен одновременно с V. Резольвентные множества операторов V и V' совпадают (гл. VIII, § 6), и тем самым утверждение (3) полностью доказано. Так как собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям оператора V, линейно независимы, доказательство утверждений (1) и (2) будет закончено, если мы приведем к противоречию следующее предположение:

существует последовательность $\{x_n\}$ линейно независимых векторов, таких, что $Vx_n = \lambda_n x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \neq 0$.

Для этого рассмотрим замкнутые подпространства X_n, натянутые на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По теореме Рисса (гл. III, § 2) найдется такая последовательность $\{y_n\}$, что $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dis}(y_n, X_{n-1}) \geqslant 1/2$ $(n = 2, 3, \ldots)$. При $n > m$

$$\lambda_n^{-1}Vy_n - \lambda_m^{-1}Vy_m = y_n + \left(-y_m - \lambda_n^{-1}T_{\lambda_n}y_n + \lambda_m^{-1}T_{\lambda_m}y_m\right) = y_n - z,$$

где

$$z = \left(y_m + \lambda_n^{-1}T_{\lambda_n}y_n - \lambda_m^{-1}T_{\lambda_m}y_m\right) \in X_{n-1}.$$

В самом деле, если $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j$, то $y_n - \lambda_n^{-1}Vy_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j - \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_n^{-1}\lambda_j x_j \in X_{n-1}$. Аналогично можно показать, что $T_{\lambda_m}y_m \in X_m$. Из приведенного построения следует, что $\left\|\lambda_n^{-1}Vy_n - \lambda_m^{-1}Vy_m\right\| \geqslant 1/2$, а это противоречит предположению о том, что оператор V вполне непрерывен, и условию $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \neq 0$.

Теорема 3. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ — собственное значение вполне непрерывного оператора $V \in L(X, X)$. По предыдущей теореме λ_0 служит также и собственным значением сопряженного оператора V'. Можно доказать следующие утверждения: (1) кратности λ_0 как собственного значения оператора V и оператора V' одинаковы; (2) уравнение $(\lambda_0 I - V)x = y$ при заданном значении $y \in X$ допускает решение $x \in X$ в том и только в том случае, когда $y \in N(\lambda_0 I' - V')^{\perp}$[1]), т. е.

[1]) Здесь $N(\lambda_0 I' - V')^{\perp} = \{y \in X;\ \langle y, f\rangle = 0,\ f \in N(\lambda_0 I' - V')\}$ $(N(\lambda_0 I' - V') = \{f \in X';\ V'f = \lambda_0 f\})$. — *Прим. перев.*

тогда и только тогда, когда для всякого непрерывного линейного функционала $f \in X'$, удовлетворяющего уравнению $V'f = \lambda_0 f$, справедливо равенство $\langle y, f \rangle = 0$; (3) для того чтобы уравнение $(\lambda_0 I' - V'f) = g$ при заданном $g \in X'$ допускало решение $f \in X'$, необходимо и достаточно, чтобы $g \in N(\lambda_0 I - V)^{\perp}$, т. е. чтобы для всякого элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению $Vx = \lambda_0 x$, выполнялось соотношение $\langle x, g \rangle = 0$.

Доказательство. Так как собственное значение $\lambda_0 \neq 0$ представляет собой изолированную особую точку резольвенты $R(\lambda; V) = (\lambda I - V)^{-1}$, то $R(\lambda; V)$ можно разложить в ряд Лорана

$$R(\lambda; V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n.$$

Нас интересует вычет $A_{-1} = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} R(\lambda; V)\, d\lambda$. Как было установлено в гл. VIII, § 8, оператор A_{-1} идемпотентен, т. е. $A_{-1}^2 = A_{-1}$. Полагая $(\lambda I - V)^{-1} = (\lambda^{-1} I - V_\lambda)$, мы найдем из равенства $(\lambda I - V)(\lambda^{-1} I + V_\lambda) = I$, что $V_\lambda = V(\lambda^{-1} V_\lambda + \lambda^{-2} I)$, и поэтому оператор V_λ вполне непрерывен вместе с оператором V. Следовательно,

$$A_{-1} = (2ni)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} R(\lambda; V)\, d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} \lambda^{-1} d\lambda \cdot I + (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} V_\lambda\, d\lambda = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} V_\lambda\, d\lambda.$$

Отсюда на основании теоремы из § 2 гл. X мы заключаем, что оператор A_{-1} вполне непрерывен.

Так как $A_{-1}X = A_{-1}(A_{-1}X)$ и оператор A_{-1} вполне непрерывен, единичный шар нормированного линейного пространства $A_{-1}X$ относительно бикомпактен. Таким образом, по теореме Рисса из гл. III, § 2, область значений $R(A_{-1})$ конечномерна. С другой стороны, если $x \neq 0$ и $Vx = \lambda_0 x$, то $(\lambda I - V)^{-1} x = (\lambda - \lambda_0)^{-1} x$, так как $(\lambda I - V)x = (\lambda - \lambda_0)x$. Значит, $A_{-1}x = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^{-1} d\lambda \cdot x = x$ и, следовательно, условие $Vx = \lambda_0 x$, $x \neq 0$, эквивалентно условию $Vx = \lambda_0 x$, $0 \neq x \in R(A_{-1})$. Аналогичные рассуждения показывают, что уравнение $V'f = \lambda_0 f$, $f \neq 0$, эквивалентно условию $V'f = \lambda_0 f$, $0 \neq f \in R(A'_{-1})$. Но пространства $R(A_1)$ и $R(A'_{-1})$ должны иметь одинаковые размерности. Действительно, если $A'_{-1}f = g$, то $A'_{-1}g = A'_{-1}(A'_{-1}f) = g$, а последнее равенство эквивалентно условию

$\langle x, g\rangle = \langle A_{-1}x, g\rangle$ для всех $x \in X$; поэтому g можно рассматривать как функционал, заданный на конечномерном пространстве $R(A_{-1})$.

Далее по известной теореме теории матриц уравнение $Vx = \lambda_0 x$ (в пространстве $R(A_{-1})$) и уравнение с транспонированной матрицей $V'f = \lambda_0 f$ (в пространстве $R(A'_{-1})$) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Таким образом, утверждение (1) полностью доказано. Утверждения (2) и (3) вытекают из леммы и теоремы об операторах с замкнутой областью значений (гл. VII, § 5).

Обобщение теории Рисса — Шаудера. Допустим, что степень V^n оператора $V \in L(X, X)$ при некотором положительном целом значении n представляет собой вполне непрерывный оператор. Тогда по теореме об отображении спектра (гл. VIII, § 7) $\sigma(V^n) = \sigma(V)^n$ [1]), и, поскольку оператор V^n вполне непрерывен, множество $\sigma(V^n)$ должно быть конечным или счетным, причем в последнем случае оно может иметь предельную точку только в нуле. Тем же условиям должно удовлетворять и множество $\sigma(V)$. Поскольку оператор V^n вполне непрерывен, оператор

$$(2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} R(\lambda; V^n)\, d\lambda$$

при всяком $\lambda_0 \neq 0$ из $\sigma(V^n)$ и достаточно малом ε имеет конечномерную область значений. Следовательно (гл. VIII, § 8), λ_0 служит полюсом резольвенты $R(\lambda; V^n)$. Но $(\lambda^n I - V^n) = (\lambda - V)(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} V + \ldots + V^{n-1})$, и поэтому

$$(\lambda^n I - V^n)^{-1} (\lambda^{n-1} I + \ldots + V^{n-1}) = (\lambda I - V)^{-1}.$$

Последнее означает, что всякое число $\lambda_0 \neq 0$, принадлежащее множеству $\sigma(V^n)$, является полюсом резольвенты $R(\lambda; V)$ и, следовательно, собственным значением оператора V. Этот факт позволяет распространить теорию Рисса — Шаудера на операторы V, какая-либо степень V^n которых вполне непрерывна. Это обобщение весьма важно с точки зрения приложений к некоторым конкретным задачам теории интегральных уравнений, таким, как задача Дирихле для потенциалов; см., например, Келлог [1]. Можно показать, что для значения $\lambda_0 = 1$ изложенная выше теория применима также к операторам $V \in L(X, X)$, для которых существуют положительное целое m и вполне непрерывный оператор $K \in L(X, X)$, такие, что $\|K - V^m\| < 1$; см. по этому поводу Иосида [9]. Заметим, что если ядра $K_1(s, t)$ и $K_2(s, t)$ ограничены и измеримы в области $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, то интегральный

---

[1]) Здесь $\sigma(V)^n \equiv \{\lambda;\ \lambda = \mu^n,\ \mu \in \sigma(V)\}$. — *Прим. перев.*

оператор T, определяемый соотношением

$$x(s) \to (Tx)(s) = (K_1K_2x)(s), \quad \text{где} \quad (K_jx)(s) = \int_0^1 K_j(s, t)\, x(t)\, dt,$$

вполне непрерывен как оператор, принадлежащий $L(L^1(0, 1), L^1(0, 1))$. См. Иосида — Мимура — Какутани [10].

6. Задача Дирихле

Пусть G — открытая ограниченная область пространства R^n, и пусть

$$L = \sum_{|s|, |t| \leqslant m} D^s c_{st}(x) D^t$$

— сильно эллиптический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами $c_{st}(x) = c_{ts}(x) \in C^\infty(G^a)$. Мы будем рассматривать здесь только вещественные функции. Пусть заданы $f \in L^2(G)$ и $u_1 \in H^m(G)$. Рассмотрим обобщенное решение $u_0 \in L^2(G)$ уравнения

$$Lu = f, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$(u_0 - u_1) \in H_0^m(G).$$

Последнее условие означает, что каждая из обобщенных производных

$$(D^j u_0 - D^j u_1), \quad |j| \leqslant m, \tag{2}$$

представляет собой предел в метрике пространства $L^2(G)$ некоторой последовательности вида $\{D^j \varphi_{h, j}\}$, где $\varphi_{h, j} \in C_0^\infty(G)$ (гл. I, § 10). Таким образом, грубо говоря, оно дает *граничное условие*

$$D^j u_0 = D^j u_1 \text{ на границе } \Gamma \text{ области } G \text{ при } |j| \leqslant m. \tag{3}$$

В этом смысле задача (1) называется *задачей Дирихле* для оператора L.

Мы изложим здесь эту задачу в том виде, в каком она была сформулирована и решена Гордингом [1].

Сначала решим задачу

$$u + \alpha Lu = f, \quad (u - u_1) \in H_0^m(G), \tag{4}$$

где положительная постоянная α выбрана так, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется неравенство Гординга

$$(\varphi + \alpha L^* \varphi, \varphi)_0 \geqslant \delta \|\varphi\|_m^2. \tag{5}$$