оператор T, определяемый соотношением

$$x(s) \to (Tx)(s) = (K_1 K_2 x)(s), \quad \text{где} \quad (K_j x)(s) = \int_0^1 K_j(s, t)\, x(t)\, dt,$$

вполне непрерывен как оператор, принадлежащий $L(L^1(0, 1), L^1(0, 1))$. См. Иосида — Мимура — Какутани [10].

6. Задача Дирихле

Пусть G — открытая ограниченная область пространства R^n, и пусть

$$L = \sum_{|s|,\, |t| \leqslant m} D^s c_{st}(x) D^t$$

— сильно эллиптический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами $c_{st}(x) = c_{ts}(x) \in C^\infty(G^a)$. Мы будем рассматривать здесь только вещественные функции. Пусть заданы $f \in L^2(G)$ и $u_1 \in H^m(G)$. Рассмотрим обобщенное решение $u_0 \in L^2(G)$ уравнения

$$Lu = f, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$(u_0 - u_1) \in H_0^m(G).$$

Последнее условие означает, что каждая из обобщенных производных

$$(D^j u_0 - D^j u_1), \quad |j| \leqslant m, \tag{2}$$

представляет собой предел в метрике пространства $L^2(G)$ некоторой последовательности вида $\{D^j \varphi_{h,j}\}$, где $\varphi_{h,j} \in C_0^\infty(G)$ (гл. I, § 10). Таким образом, грубо говоря, оно дает *граничное условие*

$$D^j u_0 = D^j u_1 \text{ на границе } \Gamma \text{ области } G \text{ при } |j| \leqslant m. \tag{3}$$

В этом смысле задача (1) называется *задачей Дирихле* для оператора L.

Мы изложим здесь эту задачу в том виде, в каком она была сформулирована и решена Гордингом [1].

Сначала решим задачу

$$u + \alpha L u = f, \quad (u - u_1) \in H_0^m(G), \tag{4}$$

где положительная постоянная α выбрана так, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется неравенство Гординга

$$(\varphi + \alpha L^* \varphi, \varphi)_0 \geqslant \delta \|\varphi\|_m^2. \tag{5}$$

Здесь $L^* = \sum_{|s|,\ |t| \leqslant m} (-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st}(x) D^s$, а δ — некоторая положительная постоянная. Такое α существует, если предположить, что коэффициенты $c_{st}(x)$ непрерывны в замыкании G^a области G. Выполняя m-кратное интегрирование по частям, мы получим также неравенство

$$|(\varphi + \alpha L^*\varphi,\ \psi)_0| \leqslant \gamma \|\varphi\|_m \cdot \|\psi\|_m \text{ для любых } \varphi,\ \psi \in C_0^\infty(G), \quad (6)$$

где γ — другая положительная постоянная, не зависящая от φ и ψ.

Аналогичным способом выводится равенство

$$(L^*\varphi,\ u_1)_0 = \sum_{s,\ t} \left((-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st} D^s \varphi,\ u_1\right)_0 = \sum_{s,\ t} (-1)^{|s|} (c_{st} D^s \varphi,\ D^t u_1)_0,$$

справедливое при любых $u_1 \in H^m(G)$ и $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Учитывая, что коэффициенты c_{st} ограничены в области G^a, и применяя неравенство Шварца, мы получаем

$$|(L^*\varphi,\ u_1)_0| \leqslant \eta \sum_{|s|,\ |t| \leqslant m} \|D^s\varphi\|_0 \cdot \|D^t u_1\|_0 \qquad \left(\eta = \sup_{s,\ t;\ x} |c_{st}(x)|\right).$$

Выражение в правой части не превосходит произведения нормы $\|\varphi\|_m$ на некоторую положительную постоянную.

Эти рассуждения показывают, что линейный функционал

$$F(\varphi) = \left(\varphi + \alpha L^*\varphi,\ u_1\right)_0, \qquad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

может быть продолжен до ограниченного линейного функционала, определенного в области $H_0^m(G)$, которая является пополнением $C_0^\infty(G)$ по норме $\|\varphi\|_m$. Аналогично, исходя из неравенств

$$|(\varphi,\ f)_0| \leqslant \|\varphi\|_0 \cdot \|f\|_0 \leqslant \|\varphi\|_m \cdot \|f\|_0,$$

мы приходим к выводу, что линейный функционал $(\varphi,\ f)_0$ $\left(\varphi \in C_0^\infty(G)\right)$ можно продолжить до ограниченного линейного функционала, определенного для функций $\varphi \in H_0^m(G)$. По теореме Рисса о представлении линейных функционалов для гильбертова пространства $H_0^m(G)$ существует такая зависящая от f и u_1 функция $f' \in H_0^m(G)$, что

$$(\varphi,\ f)_0 - (\varphi + \alpha L^*\varphi,\ u_1)_0 = (\varphi,\ f')_m \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Применяя к гильбертову пространству $H_0^m(G)$ теорему Лакса — Мильграма (гл. III, § 7), мы находим, что

$$(\varphi,\ f)_0 - \left(\varphi + \alpha L^*\varphi,\ u_1\right)_0 = \left(\varphi,\ f'\right)_m = B\left(\varphi,\ Sf'\right), \quad Sf' \in H_0^m(G), \quad (7)$$

где

$$B(\varphi,\ \psi) = (\varphi + \alpha L^*\varphi,\ \psi)_0 \quad \text{для} \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \qquad \psi \in H_0^m(G). \quad (8)$$

Это означает, что

$$(\varphi, f)_0 = (\varphi + \alpha L^*\varphi, u_1 + Sf')_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

и, таким образом, функция $u_0 = u_1 + Sf' \in L^2(G)$ представляет собой интересующее нас решение уравнения (4).

Перейдем теперь к исходному уравнению (1). Если функция $u_0 \in L^2(G)$ удовлетворяет условию (1), то для функции $u_2 = u_0 - u_1 \in H_0^m(G)$ имеем

$$(u_0, L^*\varphi)_0 = (u_1, L^*\varphi)_0 + (u_2, L^*\varphi)_0 = (f, \varphi)_0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Интегрируя, как и выше, по частям, мы приходим к неравенствам

$$|(u_1, L^*\varphi)_0| \leqslant a \|\varphi\|_m \quad (a > 0 \text{ — постоянная}),$$
$$|(f, \varphi)_0| \leqslant \|f\|_0 \cdot \|\varphi\|_0 \leqslant \|f\|_0 \cdot \|\varphi\|_m.$$

К линейному функционалу $(f, \varphi)_0 - (u_1, L^*\varphi)_0$ в пространстве $H_0^m(G)$, заданному на функциях $\varphi \in C_0^\infty(G)$, можно применить теорему Рисса о представлении. Следовательно, существует единственным образом определенная функция $v \in H_0^m(G)$, такая, что

$$(f, \varphi)_0 - (u_1, L^*\varphi)_0 = (v, \varphi)_m \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Применяя к $(v, \varphi)_m$ теорему Лакса — Мильграма, мы получаем такой оператор S_1 $(S_1 v \in H_0^m(G))$, что

$$(v, \varphi)_m = B(S_1 v, \varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \quad v \in H_0^m(G).$$

Таким образом, задача Дирихле (1) эквивалентна следующей задаче: для заданной функции $S_1 v \in H_0^m(G)$ найти решение $u_2 \in H_0^m(G)$ уравнения

$$(u_2, L^*\varphi)_0 = B(S_1 v, \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(G). \tag{1'}$$

Для произвольно заданной функции $u \in L^2(G) = H_0^0(G)$ справедливо неравенство

$$|(u, \varphi)_0| \leqslant \|u\|_0 \cdot \|\varphi\|_0 \leqslant \|u\|_0 \cdot \|\varphi\|_m.$$

Таким образом, по теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве $H_0^m(G)$ существует единственным образом определенная функция $u' = Tu \in H_0^m(G)$, такая, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$

$$(u, \varphi)_0 = (u', \varphi)_m \quad \text{и} \quad \|u'\|_m \leqslant \|u\|_0.$$

Поэтому на основании теоремы Лакса — Мильграма мы получаем

$$(u, \varphi)_0 = (u', \varphi)_m = B(S_1 u', \varphi) = B(S_1 Tu, \varphi), \quad \|S_1 Tu\|_m \leqslant \delta^{-1} \|u\|_0. \tag{9}$$

Таким образом, согласно (1′), для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$B(u_2\varphi) = (u_2, \varphi + \alpha L^*\varphi)_0 = (u_2, \varphi)_0 + \alpha(u_2, L^*\varphi)_0 = \\ = B(S_1Tu_2, \varphi) + \alpha B(S_1, v, \varphi),$$

т. е.

$$B(u_2 - S_1Tu_2 - \alpha S_1v, \varphi) = 0.$$

Так как $B(\varphi, \varphi) > 0$ при $\varphi \neq 0$, имеем

$$u_2 - S_1Tu_2 = \alpha S_1v. \tag{1″}$$

Правая часть $\alpha S_1 v \in H_0^m(G)$ представляет собой известную функцию. Условие $\| S_1Tu \|_m \leqslant \delta^{-1} \| u \|_0$ говорит о том, что оператор S_1T, отображающий пространство $H_0^m(G)$ в себя, вполне непрерывен (теорема Реллиха — Гординга из § 3 гл. X). Поэтому можно применить изложенную ранее теорию Рисса — Шаудера. Это приводит к следующей альтернативе:

> либо однородное уравнение $u - S_1Tu = 0$ обладает нетривиальным решением $u \in H_0^m(G)$, либо неоднородное уравнение $u - S_1Tu = w$ при всяком $w \in H_0^m(G)$ имеет единственное решение $u \in H_0^m(G)$.

Первая возможность соответствует случаю, когда $(u, \varphi + \alpha L^*\varphi)_0 = (u, \varphi)_0$, т. е. случаю $Lu = 0$. Возвращаясь к исходному уравнению (1), мы можем сформулировать такой результат.

Теорема. Имеет место следующая альтернатива: (1°) либо однородное уравнение $Lu = 0$ имеет нетривиальное решение $u \in H_0^m(G)$; (2°) либо для всякой функции $f \in L^2(G)$ и произвольной функции $u_1 \in H^m(G)$ существует единственное решение $u_0 \in L^2(G)$ уравнения $Lu = f$, удовлетворяющее граничному условию $u - u_1 \in H_0^m(G)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ X

Ядерное пространство Гротендика

Понятие ядерного оператора, определенное в гл. X, § 2 для B-пространств, можно следующим образом обобщить для локально выпуклых пространств.

Предложение 1. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, и пусть Y — некоторое B-пространство. Допустим, что существуют равностепенно непрерывная последовательность $\{f'_j\}$ непрерывных линейных функционалов на X, ограни-