Таким образом, согласно (1′), для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$B(u_2\varphi) = (u_2, \varphi + \alpha L^*\varphi)_0 = (u_2, \varphi)_0 + \alpha(u_2, L^*\varphi)_0 = \\ = B(S_1Tu_2, \varphi) + \alpha B(S_1, v, \varphi),$$

т. е.

$$B(u_2 - S_1Tu_2 - \alpha S_1 v, \varphi) = 0.$$

Так как $B(\varphi, \varphi) > 0$ при $\varphi \neq 0$, имеем

$$u_2 - S_1Tu_2 = \alpha S_1 v. \tag{1''}$$

Правая часть $\alpha S_1 v \in H_0^m(G)$ представляет собой известную функцию. Условие $\| S_1Tu \|_m \leqslant \delta^{-1} \| u \|_0$ говорит о том, что оператор S_1T, отображающий пространство $H_0^m(G)$ в себя, вполне непрерывен (теорема Реллиха — Гординга из § 3 гл. X). Поэтому можно применить изложенную ранее теорию Рисса — Шаудера. Это приводит к следующей альтернативе:

либо однородное уравнение $u - S_1Tu = 0$ обладает нетривиальным решением $u \in H_0^m(G)$, либо неоднородное уравнение $u - S_1Tu = w$ при всяком $w \in H_0^m(G)$ имеет единственное решение $u \in H_0^m(G)$.

Первая возможность соответствует случаю, когда $(u, \varphi + \alpha L^*\varphi)_0 = (u, \varphi)_0$, т. е. случаю $Lu = 0$. Возвращаясь к исходному уравнению (1), мы можем сформулировать такой результат.

Теорема. Имеет место следующая альтернатива: (1°) либо однородное уравнение $Lu = 0$ имеет нетривиальное решение $u \in H_0^m(G)$; (2°) либо для всякой функции $f \in L^2(G)$ и произвольной функции $u_1 \in H^m(G)$ существует единственное решение $u_0 \in L^2(G)$ уравнения $Lu = f$, удовлетворяющее граничному условию $u - u_1 \in H_0^m(G)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ X

Ядерное пространство Гротендика

Понятие ядерного оператора, определенное в гл. X, § 2 для B-пространств, можно следующим образом обобщить для локально выпуклых пространств.

Предложение 1. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, и пусть Y — некоторое B-пространство. Допустим, что существуют равностепенно непрерывная последовательность $\{f'_j\}$ непрерывных линейных функционалов на X, ограниченная последовательность $\{y_j\}$ элементов пространства Y и последовательность $\{c_j\}$ неотрицательных чисел, такая, что $\sum_{j=1}^{n} c_j < \infty$. Тогда равенство

$$T \cdot x = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j \tag{1}$$

определяет на пространстве X непрерывный линейный оператор T, действующий из X в Y.

Доказательство. В силу равностепенной непрерывности последовательности $\{f'_j\}$ существует непрерывная полунорма p на X, такая, что $\sup_j |\langle x, f'_j\rangle| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$. Поэтому при $m > n$

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j \right\| \leqslant p(x) \cdot \sup_{j\geqslant 1} \|y_j\| \cdot \sum_{j=n}^{m} c_j.$$

Это неравенство показывает, что правая часть формулы (1) существует и определяет на X непрерывный линейный оператор T, действующий из X в B-пространство Y.

Определение 1. Оператор T вида (1) мы назовем *ядерным оператором*, отображающим локально выпуклое пространство X в B-пространство Y.

Следствие. Ядерный оператор T является вполне непрерывным [1]) в том смысле, что он отображает всякую окрестность нуля в X в относительно бикомпактное множество пространства Y.

Доказательство. Определим оператор T_n формулой

$$T_n \cdot x = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j.$$

Оператор T_n вполне непрерывен, так как образ множества $V = \{x;\ p(x) \leqslant 1\}$ пространства X при отображении T_n относительно бикомпактен в Y. С другой стороны,

$$\|Tx - T_n x\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j \right\| \leqslant p(x) \sup_{j\geqslant 1} \|y_j\| \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j,$$

и поэтому последовательность $\{T_n x\}$ сильно и равномерно сходится в области V к Tx. Это и означает, что оператор T вполне непрерывен.

Приведем типичный пример ядерного оператора (ср. § 2, гл. X).

---

[1]) В предыдущих разделах понятие вполне непрерывного оператора определялось лишь для отображений B-пространств друг в друга. — *Прим. перев.*

Пример. Пусть K — бикомпактное множество пространства R^n. Тогда при $(k-j)>n$ тождественное отображение T пространства $H_0^k(K)$ в $H_0^j(K)$ является ядерным оператором.

Предложение 2. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и V — выпуклая уравновешенная окрестность нуля в X. Рассмотрим функционал Минковского $p_V(x) = \inf\limits_{x/\lambda \in V,\, \lambda>0} \lambda$ множества V. Как известно, $p_V(x)$ представляет собой непрерывную полунорму на X. Положим

$$N_V = \{x \in X;\ p_V(x) = 0\} = \{x \in X;\ \lambda x \in V \text{ для всех } \lambda > 0\}.$$

Тогда N_V является замкнутым линейным подпространством пространства X и факторпространство $X_V = X/N_V$ с нормой

$$\|\tilde{x}\|_V = p_V(x), \text{ где } \tilde{x} \text{ — класс вычетов по подпространству } N_V, \text{ содержащий элемент } x, \tag{2}$$

является линейным нормированным пространством.

Доказательство. Пусть $(x-x_1) \in N_V$. Тогда $p_V(x_1) \leqslant p_V(x) + p_V(x_1 - x) = p_V(x)$; точно так же $p_V(x) \leqslant p_V(x_1)$. Таким образом, если x и x_1 принадлежат одному и тому же классу вычетов по подпространству N_V, то $p_V(x) = p_V(x_1)$. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_V \geqslant 0$ и $\|\tilde{0}\|_V = 0$. Кроме того, если $\|\tilde{x}\|_V = 0$, то для $x \in \tilde{x}$ справедливо включение $x \in N_V$ и, следовательно, $\tilde{x} = \tilde{0}$. Неравенство треугольника получается здесь непосредственно: $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_V = p_V(x+y) \leqslant p_V(x) + p_V(y) = \|\tilde{x}\|_V + \|\tilde{y}\|_V$ $(x \in \tilde{x},\ y \in \tilde{y})$. Наконец, $\|\alpha\tilde{x}\|_V = p_V(\alpha x) = |\alpha|\, p_V(x) = |\alpha| \cdot \|\tilde{x}\|_V$ $(x \in \tilde{x})$, и доказательство закончено.

Следствие. Эквивалентность двух условий

$$(p_{V_1} \leqslant p_{V_2}) \leftrightarrow (V_2 \subseteq V_1) \tag{3}$$

позволяет определить *каноническое отображение*

$$X_{V_2} \to X_{V_1} \qquad (V_2 \subseteq V_1),$$

ставя в соответствие классу $\tilde{x}_{V_2} (\operatorname{mod} N_{V_2})$, содержащему x, класс $\tilde{x}_{V_1} (\operatorname{mod} N_{V_1})$, содержащий x. Это отображение непрерывно, так как

$$\|\tilde{x}_{V_2}\|_{V_2} = p_{V_2}(x) \geqslant p_{V_1}(x) = \|\tilde{x}_{V_1}\|_{V_1}.$$

Перейдем теперь к понятию ядерного пространства, которое ввел Гротендик [2].

Определение 2. Локально выпуклое линейное топологическое пространство X называется *ядерным пространством*, если для всякой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X существует такая выпуклая уравновешенная окрестность $U \subseteq V$ нуля, что каноническое отображение

$$T: X_U \to \hat{X}_V, \tag{4}$$

где $\hat{X}_V$ — пополнение нормированного линейного пространства X_V, является ядерным.

Пример 1. Рассмотрим топологическое произведение $R^A \equiv \equiv \prod_{\alpha \in A} R_\alpha$, $R_\alpha \equiv R$, где R — вещественная прямая, A — некоторое множество; R^A представляет собой множество всех конечных вещественных функций, заданных на A, топологизированное системой полунорм

$$p_a(x) = |x(a)|, \quad a \in A. \tag{5}$$

Пространство R^A является ядерным пространством.

Доказательство. В данном случае множество N_V состоит из всех функций $x(a) \in R^A$, таких, что для некоторого конечного множества $\{a_j \in A;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ мы имеем $x(a_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, пространство $X_V = R^A/N_V$ совпадает с пространством функций $x_V(a)$, удовлетворяющих условию $x_V(a) = 0$ для $a \neq a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, с нормой

$$\| x_V(a) \|_V = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x(a_j)|.$$

Пусть N_U—совокупность всех функций $x(a) \in R^A$, таких, что $x(a_\alpha) = 0$ при $\alpha \in A'$, где A' — любое конечное множество целых чисел, содержащее числа $1, 2, \ldots, n$. Тогда $U \subseteq V$ и каноническое отображение $X_U = R^A/N_U \to \widehat{R^A}/N_V = X_V$ является ядерным. В самом деле, это отображение является непрерывным линейным отображением с конечномерной областью значений.

Пример 2. Всякое ядерное B-пространство X должно быть конечномерным.

Доказательство. В B-пространстве X для любой выпуклой уравновешенной окрестности нуля V пространство X_V совпадает, очевидно, с X. Таким образом, если B-пространство X — ядерное, то тождественный оператор $X \to X$ вполне непрерывен, и поэтому, согласно теореме Рисса (гл. III, § 2), пространство X должно быть конечномерным.

Пример 3. Пусть K — некоторое бикомпактное множество в R^n. Тогда пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$, определенное в гл. I, § 1, является ядерным.

Доказательство. Как в гл. I, § 1, пусть

$$p_{K,k}(f) = \sup_{x \in K,\ |s| \leqslant k} |D^s f(x)|$$

есть одна из полунорм, определяющих топологию в $\mathfrak{D}_K(R^n)$. Положим $V_k = \{f \in \mathfrak{D}_K(R^n);\ p_{K,k}(f) \leqslant 1\}$. Тогда $N_{V_k} = \{0\}$ и $X_{V_k} = = X/N_{V_k} = \mathfrak{D}_K(R^n)/N_{V_k}$ — не что иное, как пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$, нормированное при помощи $p_{K,k}$. Если $(k-j)>n$, то, как и в примере, приведенном после следствия из определения 1, нетрудно показать, что каноническое отображение X_{V_k} в X_{V_j} осуществляется ядерным оператором. Следовательно, пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$ ядерное.

Теорема 1. Для того чтобы локально выпуклое линейное топологическое пространство X было ядерным, необходимо и достаточно, чтобы для любой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X каноническое отображение $X\to\widehat{X}_V$ было ядерным.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $U\subseteq V$ — выпуклая уравновешенная окрестность элемента $x=0\in X$, такая, что каноническое отображение $X_U\to\widehat{X}_V$ является ядерным. Каноническое отображение T: $X\to\widehat{X}_V$ можно представить как произведение канонического отображения $X\to\widehat{X}_U$ и ядерного канонического отображения $X_U\to\widehat{X}_V$. Поэтому оператор T должен быть ядерным.

Достаточность. Допустим, что каноническое отображение T: $X\to\widehat{X}_V$ определяется ядерным оператором

$$Tx=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\langle x,\ f'_j\rangle y_j.$$

Множество $U_\alpha=\{x\in X;\ |\langle x,\ f'_j\rangle|\leqslant\alpha$ при $j=1,\ 2,\ \ldots\}$ при любом $\alpha>0$ представляет собой выпуклую уравновешенную окрестность нуля в пространстве X, так как семейство $\{f'_j\}\subseteq X'$ равностепенно непрерывно. Кроме того,

$$\|Tx\|_V=\Big\|\sum_j c_j\langle x,\ f'_j\rangle y_j\Big\|_V\leqslant\alpha\sup_j\|y_j\|_V\sum_j c_j\quad\text{для всех}\quad x\in U_\alpha.$$

Выберем теперь столь малое $\alpha>0$, чтобы правая часть последнего неравенства стала меньше 1. Тогда $\|Tx\|_V<1$ и $U_\alpha\subseteq V$. Каждый из функционалов f'_j можно рассматривать как элемент сопряженного пространства X'_{U_α}, и поэтому

$$Tx=Tz=\sum_j c_j\langle x,\ f'_j\rangle y_j\quad\text{при}\quad (x-z)\in N_{U_\alpha}.$$

Следовательно, каноническое отображение $X_{U_\alpha}\to\widehat{X}_V$ определяется ядерным оператором

$$\tilde{x}_{U_\alpha}\to\sum_j c_j\langle\tilde{x}_{U_\alpha},\ f'_j\rangle y_j.$$

Теорема 2. Пусть X — ядерное локально выпуклое линейное топологическое пространство. Тогда для всякой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X найдется такая выпуклая уравновешенная окрестность $W\subseteq V$ нуля в X, что пространство $\widehat{X}_W$ будет гильбертовым.

Доказательство. Ядерное каноническое отображение $X_U \to \hat{X}_V$ ($U \subsetneq V$), определяемое оператором

$$T\tilde{x}_U = \sum_j c_j \langle \tilde{x}_U, f'_j \rangle y'_j,$$

можно представить в виде произведения двух операторов α: $X_U \to (l^2)$ и β: $(l^2) \to \hat{X}_V$ следующего вида:

$$\alpha:\ \tilde{x}_U \to \{c_j^{1/2} \langle \tilde{x}_U, f'_j \rangle\},$$
$$\beta:\ \{\xi_j\} \to \sum_j c_j^{1/2} \xi_j y_j.$$

Непрерывность оператора α вытекает из неравенства

$$\sum_j | c_j^{1/2} \langle \tilde{x}_U, f'_j \rangle |^2 \leqslant \left(\sup_j \| f'_j \| \cdot \| \tilde{x}_U \|_U\right)^2 \cdot \sum_j c_j,$$

а непрерывность β доказывается с помощью соотношений

$$\left\| \sum_j c_j^{1/2} \xi_j y_j \right\|_V^2 \leqslant \sum_j c_j \| y_j \|_V^2 \sum_j | \xi_j |^2 \leqslant \sup_j \| y_j \|_V^2 \cdot \| \{\xi_j\} \|_{(l^2)}^2 \sum_j c_j.$$

Обозначим через U_2 прообраз в (l^2) единичного шара пространства $\hat{X}_V$ при отображении β. Множество U_2 служит окрестностью нуля пространства (l^2) и поэтому содержит некоторый шар S с центром в точке $0 \in (l^2)$. Пусть W — прообраз в X этого шара S при непрерывном отображении $\tilde{\alpha}$, определенном как произведение непрерывного канонического отображения $X \to X_U$ и непрерывного отображения α: $X_U \to (l^2)$. Тогда ясно, что $W \subseteq V$, и, следовательно, для любого класса $\tilde{x}_W \in X_W$

$$\| \tilde{x}_W \|_W = \inf_{x/\lambda \in W,\ \lambda > 0} \lambda = \inf_{\tilde{\alpha} x/\lambda \in S,\ \lambda > 0} \lambda = \| \tilde{\alpha} x \|_{(l^2)} / r$$

($r > 0$ — радиус сферы S).

Так как $\| \quad \|_{(l^2)}$ — норма в гильбертовом пространстве (l^2), то X_W — предгильбертово пространство. Следовательно, $\hat{X}_W$ (пополнение X_W) представляет собой гильбертово пространство.

Следствие. Пусть X — ядерное локально выпуклое пространство. Тогда для любой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X существуют такие выпуклые уравновешенные окрестности W_1 и W_2 нуля в X, что

$W_2 \subseteq W_1 \subseteq V$, $\hat{X}_{W_1}$ и $\hat{X}_{W_2}$ — гильбертовы пространства и канонические отображения $X \to \hat{X}_{W_2}$, $\hat{X}_{W_2} \to \hat{X}_{W_1}$, $\hat{X}_{W_1} \to \hat{X}_V$ являются ядерными.

Таким образом, ядерное локально выпуклое пространство X обладает фундаментальной системой $\{V_\alpha\}$ окрестностей нуля, такой, что пространства $\hat{X}_{V_\alpha}$ являются гильбертовыми.

Некоторые дополнительные сведения о ядерных пространствах. Можно доказать следующие утверждения:

1. Любое линейное подпространство и всякое факторпространство ядерного пространства являются ядерными.

2. Топологическое произведение любого семейства ядерных пространств и индуктивный предел всякой последовательности ядерных пространств также являются ядерными пространствами.

3. Пространство, сильно сопряженное к индуктивному пределу последовательности ядерных пространств, каждое из которых является F-пространством, представляет собой ядерное пространство.

Доказательства этих предложений см. в книге Гротендика [1, стр. 47]. Из свойства 2 вытекает, что пространство $\mathfrak{D}(R^n)$, представляющее собой индуктивный предел последовательности $\{\mathfrak{D}_{K_r}(R^n); r=1, 2, \ldots\}$ (здесь через K_r обозначен шар $|x| \leqslant r$ пространства R^n), ядерно. Поэтому, согласно утверждению 3, $\mathfrak{D}(R^n)'$ — тоже ядерное пространство. Ядерными являются также пространства $\mathfrak{E}(R^n)$, $\mathfrak{E}(R^n)'$, $\mathfrak{S}(R^n)$ и $\mathfrak{S}(R^n)'$.

Важность понятия ядерного пространства была отмечена недавно в работе Минлоса [1], который доказал следующее обобщение теоремы Колмогорова о продолжении мер.

Пусть X — ядерное пространство, топология которого определяется счетной системой выпуклых уравновешенных окрестностей нуля, и пусть X' — пространство, сильно сопряженное к X. Множество вида

$$Z' = \{f' \in X';\ a_i < \langle x_i, f' \rangle < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

называется *цилиндрическим множеством* в X'. Допустим, что на семействе всех цилиндрических множеств определена неотрицательная функция множества μ_0, и эта функция σ-аддитивна на цилиндрических множествах Z', соответствующих фиксированным точкам $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда при некоторых условиях *совместности* и *непрерывности* функция μ_0 может быть единственным способом продолжена до неотрицательной σ-аддитивной функции множества, определенной на наименьшем σ-аддитивном семействе множеств из X', содержащем все цилиндрические множества из X'.

Доказательство и приложение этих результатов см. в книге Гельфанда — Виленкина [3].