ГЛАВА XI

Нормированные кольца и спектральное представление линейных операторов

Линейное пространство A над некоторым скалярным полем (F) называется *алгеброй* или *кольцом* над полем (F), если для каждой пары элементов $x, y \in A$ однозначно определено произведение $xy \in A$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} (xy)z &= x(yz) \qquad \text{(ассоциативность)}, \\ x(y+z) &= xy + xz \qquad \text{(дистрибутивность)}, \\ \alpha\beta(xy) &= (\alpha x)(\beta y). \end{aligned} \tag{1}$$

Если существует элемент $e \in A$, называемый *единицей* алгебры, такой, что $ex = xe = x$ для всех $x \in A$, то A называется *алгеброй с единицей*. Единица e алгебры A, если она существует, определяется однозначно. Действительно, если допустить, что e' — другая единица алгебры A, то $ee' = e = e'$. Если операция умножения xy *коммутативна*, т. е. $xy = yx$ для любой пары $x, y \in A$, то A называется *коммутативной алгеброй*. Пусть A — некоторая алгебра с единицей e. Если для данного элемента $x \in A$ существует такой элемент $x' \in A$, что $xx' = x'x = e$, то x' называется элементом, *обратным* к x. Если элемент x', обратный к x, существует, то он определен единственным образом. В самом деле, если x'' — другой элемент, обратный к x, то

$$x''(xx') = x''e = x'' = (x''x)x' = ex' = x'.$$

Элемент x', обратный к x (если он существует), будет обозначаться через x^{-1}.

Алгебра называется *банаховой алгеброй* или, кратко, *B-алгеброй*, если она является B-пространством и выполняется условие

$$\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|. \tag{2}$$

Неравенство

$$\|x_ny_n - xy\| \leqslant \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \leqslant \leqslant \|x_n\| \cdot \|(y_n - y)\| + \|(x_n - x)\| \cdot \|y\|$$

показывает, что произведение xy непрерывно по совокупности переменных x, y.

Пример 1. Пусть X — некоторое B-пространство. Пространство $L(X, X)$ с операциями сложения операторов $T+S$ и умножения операторов TS образует B-алгебру с единицей. Единицей алгебры $L(X, X)$ служит тождественный оператор I, а нормой элемента T алгебры $L(X, X)$ является норма оператора $\|T\|$.

Пример 2. Пусть S — бикомпактное топологическое пространство. Пространство $C(S)$ является B-алгеброй с операциями $(x_1+x_2)(s) = x_1(s)+x_2(s)$, $(\alpha x)(s) = \alpha x(s)$, $(x_1x_2)(s) = x_1(s)x_2(s)$ и нормой $\|x\| = \sup\limits_{s\in S}|x(s)|$.

Пример 3. Обозначим через B совокупность всех непрерывных функций $x(s)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant 1$, представимых в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье

$$x(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n s}, \quad \text{где} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в том, что множество B с обычными операциями сложения и умножения функций и нормой

$$\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \tag{4}$$

представляет собой коммутативную B-алгебру с единицей.

В двух последних примерах единицей служит функция $e(s) \equiv 1$ и $\|e\| = 1$. В дальнейшем мы будем рассматривать коммутативные B-алгебры с единицей e, для которых

$$\|e\| = 1. \tag{5}$$

Такие алгебры мы будем называть *нормированными кольцами*.

Исторические замечания. Понятие банаховой алгебры ввел в анализ Нагумо [1]. Он показал, что теоремы Коши теории функций комплексной переменной могут быть распространены на функции со значениями из B-алгебры, и применил эту теорию к исследованию резольвенты ограниченного линейного оператора в окрестности изолированной особой точки. В результате оказалось возможным абстрактное изложение этого вопроса, данное нами в гл. VIII, § 8, этой книги. Иосида [11] доказал, что связная группа, вложенная в некоторую B-алгебру, является группой Ли в том и только в том случае, когда она локально бикомпактна. Этот результат обобщает соответствующий результат фон Неймана [6] по теории матричных групп; ср. Хилле — Филлипс [1], где воспроизводится результат Иосида [11].

Начало развитию *теории идеалов* нормированных колец было положено Гельфандом [2]. Он показал, что нормированное кольцо может быть представлено как кольцо непрерывных функций, заданных на пространстве *максимальных идеалов* рассматриваемого кольца. Это представление позволяет изучить спектральное разложение ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве, не прибегая к интегрированию (см. Иосида [12]). Результаты, относящиеся к этому вопросу, будут изложены в дальнейших параграфах. *Гельфандовское представление* позволяет также дать новое доказательство тауберовой теоремы Винера [2]. Мы приведем это доказательство в последнем параграфе этой главы. Более подробное изложение теории банаховых алгебр можно найти в работах Наймарка [1], Риккарта [1], Гельфанда — Райкова — Шилова [5].

1. Максимальные идеалы нормированного кольца

Мы будем рассматривать здесь коммутативные B-алгебры B с единицей e, такие, что $\|e\|=1$.

Определение 1. Подмножество J алгебры B называется ее *идеалом*, если $(\alpha x+\beta y)\in J$ и $zx\in J$ для любых $x, y\in J$ и всякого $z\in B$. Сама алгебра B и множество $\{0\}$ образуют идеалы B. Идеалы, отличные от B и $\{0\}$, называются *нетривиальными*. Нетривиальный идеал J называется *максимальным идеалом*, если он не входит как собственное подмножество ни в какой другой нетривиальный идеал.

Предложение 1. Всякий нетривиальный идеал J_0 алгебры B содержится в некотором максимальном идеале J.

Доказательство. Обозначим через $[J_0]$ совокупность всех нетривиальных идеалов, содержащих J_0. Упорядочим множество $[J_0]$ с помощью отношения включения, полагая $J_1\prec J_2$, если J_1 является подмножеством в J_2. Допустим, что $\{J_\alpha\}$—линейно упорядоченное подмножество из $[J_0]$, и положим $J_\beta=\bigcup\limits_{J_\alpha\in\{J_\alpha\}} J_\alpha$. Покажем, что J_β—мажоранта для $\{J_\alpha\}$. Действительно, если $x, y\in J_\beta$, то найдутся идеалы J_{α_1} и J_{α_2}, такие, что $x\in J_{\alpha_1}$, $y\in J_{\alpha_2}$. Множество $\{J_\alpha\}$ линейно упорядочено, поэтому $J_{\alpha_1}\prec J_{\alpha_2}$ либо $J_{\alpha_1}\succ J_{\alpha_2}$, т. е. элементы x и y оба принадлежат J_{α_1} либо J_{α_2}. Поэтому либо $(x-y)\in J_{\alpha_2}\subseteq J_\beta$, либо $(x-y)\in J_{\alpha_1}\subseteq J_\beta$, и аналогично либо $zx\in J_{\alpha_2}\subseteq J_\beta$, либо $zx\in$ $\in J_{\alpha_1}\subseteq J_\beta$ при всяком $z\in B$. Это показывает, что J_β — идеал. Элемент e не входит ни в один из идеалов J_α, поэтому он не содержится и в $J_\beta=\bigcup\limits_{J_\alpha\in\{J_\alpha\}} J_\alpha$. Следовательно, идеал J_β не тривиален и содержит все идеалы J_α. Отсюда по лемме Цорна мы заключаем, что должен существовать по крайней мере один максимальный идеал, содержащий J_0.

Следствие. Для того чтобы элемент x алгебры B обладал обратным элементом $x^{-1}\in B$ ($x^{-1}x=xx^{-1}=e$), необходимо и достаточно, чтобы x не содержался ни в каком максимальном идеале.

Доказательство. Если элемент $x^{-1} \in B$ существует, то всякий идеал $J \ni x$ должен содержать элемент $xx^{-1} = e$, и тогда J совпадает с самой алгеброй B. Обратно, если x не содержится ни в каком максимальном идеале, то идеал $xB = \{xb;\ b \in B\} \neq \{0\}$ должен совпадать с B, так как в противном случае нашелся бы по крайней мере один максимальный идеал, содержащий $xB \ni x = xe$. Так как $xB = B$, существует такой элемент $b \in B$, что $xb = e$. Из коммутативности алгебры B следует, что $xb = bx = e$, т. е. $b = x^{-1}$.

Предложение 2. Всякий максимальный идеал J является замкнутым линейным подпространством в B.

Доказательство. Так как алгебраические операции (сложение, умножение и умножение на скаляры) непрерывны в B, сильное замыкание J^a идеала J также представляет собой идеал, содержащий J. Допустим, что $J^a \neq J$. Тогда $J^a = B$, ибо идеал J максимален. Поэтому $e \in J^a$ и, следовательно, найдется такой элемент $x \in J$, что $\| e - x \| < 1$. Этот элемент x имеет обратный x^{-1}, который можно записать в виде ряда Неймана

$$e + (e - x) + (e - x)^2 + \ldots .$$

В самом деле, неравенство $\| (e - x) \|^n \leqslant \| e - x \|^n$ обеспечивает сходимость этого ряда к некоторому элементу из B, и этот элемент является обратным к x, что обнаруживается, если ряд Неймана умножить на $x = e - (e - x)$. Из приведенных рассуждений следует, что $e = x^{-1}x \in J$, т. е. J не может быть максимальным идеалом. Таким образом, $J^a = J$.

Предложение 3. Для элементов идеала J алгебры B определим следующее отношение:

$$x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, J), \quad \text{или} \quad x \sim y \,(\mathrm{mod}\, J), \quad \text{или просто} \quad x \sim y, \quad \text{если } (x - y) \in J. \tag{1}$$

Это отношение является отношением эквивалентности, т. е.

$$\begin{gathered} x \sim x \quad \text{(рефлексивность);} \\ \text{если } x \sim y, \text{ то } y \sim x \quad \text{(симметрия);} \\ \text{если } x \sim y \text{ и } y \sim z, \text{ то } x \sim z \quad \text{(транзитивность).} \end{gathered}$$

Обозначим через $\bar{x}$ множество $\{y;\ (y - x) \in J\}$; оно называется *классом эквивалентности* $(\mathrm{mod}\, J)$, *содержащим* x. Тогда классы $(\overline{x + y})$, $\overline{\alpha x}$ и $(\overline{xy})$ определяются независимо от выбора элементов x и y соответственно из классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Доказательство. Мы должны показать, что если $x \sim x'$, $y \sim y'$, то $(x + y) \sim (x' + y')$, $\alpha x \sim \alpha x'$ и $xy \sim x'y'$. Эти утверждения очевидны, так как J—идеал. Например, если $(x - x') \in J$ и $(y - y') \in J$, то $xy - x'y' = (x - x')\, y + x'(y - y') \in J$.

Следствие. Множество всех классов $\bar{x} \pmod J$ с операциями

$$\bar{x}+\bar{y}=(\overline{x+y}), \qquad \alpha\bar{x}=\overline{\alpha x}, \qquad \bar{x}\bar{y}=\overline{xy} \tag{2}$$

образует алгебру.

Определение 2. Построенная выше алгебра называется *алгеброй классов вычетов алгебры B по идеалу J* и обозначается через B/J. Отображение $x \to \bar{x}$ алгебры B на $\bar{B}=B/J$ удовлетворяет условиям (2) и является, таким образом, *гомоморфизмом*.

Предложение 4. Пусть J — максимальный идеал алгебры B. Тогда $\bar{B}=B/J$ является *полем*, т. е. каждый отличный от нуля элемент $\bar{x} \in \bar{B}$ имеет обратный элемент $\bar{x}^{-1} \in \bar{B}$, такой, что $\bar{x}^{-1}\bar{x}=\bar{x}\bar{x}^{-1}=\bar{e}$.

Доказательство. Допустим, что для некоторого элемента $\bar{x} \neq 0$ обратного $\bar{x}^{-1}$ не существует. Тогда множество $\bar{x}\bar{B}=\{\bar{x}\bar{b};\ \bar{b} \in \bar{B}\}$ является идеалом в $\bar{B}$, который нетривиален, так как он не содержит $\bar{e}$, но содержит $\bar{x} \neq 0$. Прообраз идеала при гомоморфизме является идеалом. Отсюда следует, что алгебра B содержит некоторый нетривиальный идеал, в который идеал J входит как собственное подмножество. Это противоречит максимальности идеала J.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть B — нормированное кольцо над полем комплексных чисел, и пусть J — некоторый максимальный идеал в B. Тогда алгебра $\bar{B}=B/J$ изоморфна полю комплексных чисел, т. е. каждый элемент $\bar{x} \in \bar{B}$ единственным образом представляется в виде $\bar{x}=\xi\bar{e}$, где ξ — некоторое комплексное число.

Доказательство. Покажем, что алгебра $\bar{B}=B/J$ с нормой

$$\|\bar{x}\|=\inf_{x \in \bar{x}}\|x\| \tag{3}$$

образует нормированное кольцо. Если мы докажем это, то отсюда будет следовать, что B/J — нормированное поле, и тогда по теореме Гельфанда — Мазура (гл. V, § 3) нормированное поле $\bar{B}=B/J$ изоморфно полю комплексных чисел.

Ясно, что $\|\alpha\bar{x}\|=|\alpha|\cdot\|\bar{x}\|$; кроме того,

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|=\inf_{x \in \bar{x},\ y \in \bar{y}}\|x+y\| \leqslant \inf_{x \in \bar{x}}\|x\|+\inf_{y \in \bar{y}}\|y\|=\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|.$$

Неравенство $\|\bar{x}\bar{y}\| \leqslant \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ выводится аналогичным способом. Если $\|\bar{x}\|=0$, то найдется такая последовательность $\{x_n\} \subseteq \bar{x}$, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Поэтому $(x-x_n) \in J$ для любого $x \in \bar{x}$ и, следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x-x_n)=x$. Это показывает, что $x \in J^a=J$, т. е.

$\bar{x}=\bar{0}$. Значит, равенство $\|\bar{x}\|=0$ эквивалентно равенству $\bar{x}=\bar{0}$. Из определения нормы $\|\bar{x}\|$ видно, что $\|\bar{e}\|\leqslant\|e\|=1$. Если $\|\bar{e}\|<1$, то существует элемент $x\in J$, для которого $\|e-x\|<1$. Как при доказательстве предложения 2, мы убеждаемся в существовании обратного элемента x^{-1}, что противоречит следствию из предложения 1. Таким образом, $\|\bar{e}\|=1$. Наконец, поскольку B — банахово пространство и идеал J, согласно предложению 2, является замкнутым подпространством в B, факторпространство $\bar{B}=B/J$ полно по отношению к норме (3) (гл. I, § 11). Теорема доказана.

Следствие. Обозначим число ξ, фигурирующее в представлении $\bar{x}=\xi\bar{e}$, через $x(J)$. Таким образом, для каждого $x\in B$ мы получаем комплексную функцию $x(J)$, определенную на множестве $\{J\}$ всех максимальных идеалов алгебры B. При этом

$$\begin{gathered}(x+y)(J)=x(J)+y(J), \quad (\alpha x)(J)=\alpha x(J),\\ (xy)(J)=x(J)\,y(J) \quad \text{и} \quad e(J)\equiv 1.\end{gathered} \tag{4}$$

Кроме того,

$$\sup_{J\in\{J\}}|x(J)|\leqslant\|x\|, \tag{5}$$

и

$$\begin{gathered}\text{из равенства } \sup_{J\in\{J\}}|x(J)|=0 \text{ вытекает равенство } x=0\\ \text{тогда и только тогда, когда } \bigcap_{J\in\{J\}} J=\{0\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. Отображение $x\to\bar{x}=x(J)\bar{e}$ алгебры B на алгебру классов вычетов $\bar{B}=B/J$ является гомоморфизмом, т. е. выполняются условие (2), а следовательно, и условие (4). Неравенство (5) выводится следующим образом:

$$|\xi|=|\xi|\cdot\|\bar{e}\|=\|\bar{x}\|=\inf_{x\in\bar{x}}\|x\|\leqslant\|x\|.$$

Свойство (6) очевидно, так как $x(J)=0$ тождественно на $\{J\}$ тогда и только тогда, когда $x\in\bigcap\limits_{J\in\{J\}} J$.

Определение 3. Представление

$$x\to x(J) \tag{7}$$

коммутативного нормированного кольца B с помощью кольца функций $x(J)$, заданных на множестве $\{J\}$ всех максимальных идеалов J алгебры B, называется ***гельфандовским представлением*** кольца B.