2. Радикал кольца. Полупростые кольца

Определение 1. Пусть B — нормированное кольцо над полем комплексных чисел и $\{J\}$ — совокупность всех его максимальных идеалов J. Идеал $R = \bigcap\limits_{J \in \{J\}} J$ называется *радикалом* кольца B. Нормированное кольцо B, радикал которого $R = \bigcap\limits_{J \in \{J\}} J$ совпадает с идеалом $\{0\}$, называется *полупростым*.

Теорема 1. Для всякого элемента $x \in B$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \| x^n \|^{1/n}$, и

$$\lim_{n \to \infty} \| x^n \|^{1/n} = \sup_{J \in \{J\}} | x(J) |. \tag{1}$$

Доказательство. Положим $\alpha = \sup\limits_{J \in \{J\}} | x(J) |$. Из неравенства $\| x^n \| \geqslant \| x^n(J) \| = | x(J) |^n$ следует, что $\| x^n \| \geqslant \alpha^n$, и поэтому

$$\varliminf_{n \to \infty} \| x^n \|^{1/n} \geqslant \alpha.$$

Мы должны показать, что $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \| x^n \|^{1/n} \leqslant \alpha$.

Выберем число β так, что $|\beta| > \alpha$. Тогда $x(J) - \beta \neq 0$ для всякого максимального идеала $J \in \{J\}$, а это означает, что $(x - \beta e) \notin J$. Поэтому существует обратный элемент $(\beta e - x)^{-1}$. Обозначим β^{-1} через λ. Обратный элемент $(\beta e - x)^{-1} = \lambda (e - \lambda x)^{-1}$ существует при любом λ, удовлетворяющем условию $|\lambda| < \alpha^{-1}$. Кроме того, как и в теореме 1 гл. VIII, § 2, мы видим, что функция $\lambda (e - \lambda x)^{-1}$ голоморфна по λ при $|\lambda| < \alpha^{-1}$. Поэтому можно написать для $\lambda (e - x\lambda)^{-1}$ разложение Тейлора

$$\lambda (e - x\lambda)^{-1} = \lambda (e + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots + \lambda^n x_n + \ldots).$$

Ряд Неймана $(e - \lambda x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$ сходится при $\| \lambda x \| < 1$, следовательно, $x_n = x^n$. В силу сходимости написанного выше ряда Тейлора

$$\lim_{n \to \infty} \| \lambda^n x_n \| = 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| < \alpha^{-1}.$$

Таким образом, $\| x^n \| = | \lambda |^{-n} \cdot \| \lambda^n x_n \| < | \lambda |^{-n}$ при достаточно больших n, если $|\lambda| < \alpha^{-1}$, и поэтому

$$\varlimsup_{n \to \infty} \| x^n \|^{1/n} \leqslant | \lambda |^{-1}$$

при всяком λ, удовлетворяющем условию $|\lambda|^{-1} > \alpha$, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^n\|^{1/n} \leqslant \alpha.$$

Теорема доказана.

Следствие. Радикал $R = \bigcap\limits_{J \in \{J\}} J$ нормированного кольца B совпадает с множеством всех *обобщенных нильпотентных элементов* $x \in B$, которые определяются условием

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0. \tag{2}$$

Определение 2. *Спектром* элемента $x \in B$ называется совокупность всех комплексных чисел λ, для которых в кольце B не существует обратного элемента $(x - \lambda e)^{-1}$.

Если λ принадлежит спектру элемента x, то существует такой максимальный идеал J, что $(x - \lambda e) \in J$. Обратно, если элемент $(x - \lambda e)$ входит в некоторый максимальный идеал J, то обратного элемента $(x - \lambda e)^{-1}$ не существует. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Спектр элемента $x \in B$ совпадает с совокупностью всех значений, принимаемых функцией $x(J)$ на множестве $\{J\}$, состоящем из всех максимальных идеалов J нормированного кольца B.

Введение топологии в пространстве максимальных идеалов. Приложение теоремы Тихонова. Для каждого элемента $J_0 \in \{J\}$ определим фундаментальную систему его окрестностей следующим образом:

$$\{J \in \{J\};\ |x_i(J) - x_i(J_0)| < \varepsilon_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_i > 0$, $n > 0$, $x_i \in B$ выбраны произвольно. Тогда $\{J\}$ становится топологическим пространством, и каждая функция $x(J)$ $(x \in B)$, определенная на $\{J\}$, непрерывна в этой топологии. Мы должны лишь проверить выполнение аксиомы отделимости. Пусть J_0, $J_1 \in \{J\}$ и $J_0 \neq J_1$; покажем, что найдутся окрестность V_0 идеала J_0 и окрестность V_1 идеала J_1, пересечение которых $V_0 \cap V_1$ пусто. Пусть $x_0 \in J_0$, $x_0 \notin I_1$. Тогда $x_0(J_0) = 0$ и $x_0(J_1) = \alpha \neq 0$. Окрестности

$$V_0 = \left\{J \in \{J\};\ |x_0(J)| < \frac{|\alpha|}{2}\right\},\quad V_1 = \left\{J \in \{J\};\ |x_0(J) - (x_0(J_1)| < \frac{|\alpha|}{2}\right\}$$

не пересекаются.

Теорема 3. Пространство $\{J\}$, топологизированное таким способом, бикомпактно.

Доказательство. Поставим в соответствие каждому элементу $x \in B$ бикомпактное множество точек комплексной плоскости z

$$K_x = \{z;\ |z| \leqslant \|x\|\}.$$

Тогда топологическое произведение

$$S = \prod_{x \in B} K_x,$$

согласно теореме Тихонова, бикомпактно (см. введение). Каждому максимальному идеалу $J_0 \in \{J\}$ сопоставим точку

$$\prod_{x \in B} x(J_0) = s(J_0) \in S.$$

Это соответствие определяет взаимно однозначное отображение $J_0 \to s(J_0)$ пространства $\{J\}$ на некоторое подмножество S_1 пространства S. Топология пространства $\{J\}$ совпадает при этом с относительной топологией S_1 как подмножества пространства S. Следовательно, если мы сумеем доказать, что S_1 является замкнутым подмножеством бикомпактного пространства S, то отсюда будет следовать, что его топологический образ $\{J\}$ бикомпактен.

Для того чтобы доказать замкнутость S_1, рассмотрим произвольную предельную точку $\omega = \prod_{x \in B} \lambda_x \in S$ множества S_1 в пространстве S. Покажем, что отображение $x \to \lambda_x$ представляет собой гомоморфизм алгебры B в поле комплексных чисел (K). Если это будет доказано, то вследствие изоморфности алгебры B/J_0 и поля (K) мы сможем утверждать, что идеал $J_0 = \{x;\ \lambda_x = 0\}$ алгебры B максимален и $(x - \lambda_x e) \in J_0$, т. е. $x(J_0) = \lambda_x$. Отсюда будет следовать, что предельная точка $\omega = \prod_{x \in B} \lambda_x = \prod_{x \in B} x(J_0)$ принадлежит S_1.

Итак, мы должны доказать, что

$$\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y, \quad \lambda_{\alpha x} = \alpha \lambda_x, \quad \lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y, \qquad \lambda_e = 1.$$

Покажем, например, что $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$ (прочие свойства устанавливаются аналогичным способом). Поскольку $\omega = \prod_{x \in B} \lambda_x$ — предельная точка множества S_1, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой максимальный идеал J, что

$$|\lambda_x - x(J)| < \varepsilon, \quad |\lambda_y - y(J)| < \varepsilon, \quad |\lambda_{x+y} - (x+y)(J)| < \varepsilon.$$

Но так как $(x+y)(J) = x(J) + y(J)$ и $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, отсюда вытекает, что $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$.

Мы можем теперь сформулировать результаты приведенного выше исследования гельфандовского представления $x \to x(J)$ нормированного кольца B в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Всякое нормированное кольцо B над полем комплексных чисел гомоморфно отображается на кольцо функций $x(J)$, заданных на бикомпактном пространстве $\{J\}$ максимальных идеалов J кольца B. Радикал R кольца B состоит из тех и только тех элементов, которые при гомоморфизме $x \to x(J)$ переходят в функцию, тождественно равную нулю на $\{J\}$. Гомоморфизм $x \to x(J)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда кольцо B полупростое.

Приложение теоремы Стоуна — Вейерштрасса

Полученное выше кольцо функций $x(J)$ плотно в пространстве всех непрерывных комплексных функций, заданных на $\{J\}$, в топологии равномерной сходимости, если кольцо B *симметрично* в следующем смысле:

$$\text{для всякого } x \in B \text{ существует элемент } x^* \in B, \text{ такой, что } x^*(J) = \overline{x(J)} \text{ на } \{J\}. \tag{4}$$

Примеры гельфандовских представлений

Пример 1. Пусть $B = C(S)$, где S — произвольное бикомпактное топологическое пространство, а J_0 — некоторый максимальный идеал B-алгебры $C(S)$. Тогда найдется такая точка $s_0 \in S$, что $x(s_0) = 0$ для всех $x \in J_0$. Действительно, если допустить противное, то для любой точки $s_\alpha \in S$ найдется элемент $x_\alpha \in J_0$, такой, что $x_\alpha(s_\alpha) \neq 0$. Так как функции $x_\alpha(s)$ непрерывны, существуют окрестности V_α точек s_α, такие, что $x_\alpha(s) \neq 0$ в V_α. Поскольку рассматриваемое пространство S бикомпактно, можно выделить конечную систему окрестностей $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_n}$, покрывающую S: $\bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{\alpha_j} = S$. Но тогда функция

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}(s)}\, x_{\alpha_i}(s) \in J_0$$

не обращается в нуль ни в одной точке $s \in S$, и поэтому существует элемент x^{-1}, $x^{-1}(s) = x(s)^{-1}$, обратный элементу $x \in J_0$, что противоречит максимальности идеала J_0. Итак, существует такая точка $s_0 \in S$, что $x(s_0) = 0$ для всех $x \in J$, и поэтому идеал J_0 содержится в максимальном идеале $J' = \{x \in B,\ x(s_0) = 0\}$. Но так как идеал J_0 по предположению максимален, то $J_0 = J'$. Таким образом, между элементами J пространства $\{J\}$ максимальных идеалов нормированного кольца $B = C(S)$ и точками $s \in S$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Пример 2. Пусть B — множество всех функций $x(s)$, заданных на отрезке $0 \leqslant s \leqslant 1$, которые разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$x(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i s n}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Множество B с операциями $(x+y)(s)=x(s)+y(s)$, $xy(s)=x(s)y(s)$, $(\alpha x)(s)=\alpha x(s)$ и нормой $\|x\|=\sum_j |c_j|$ образует нормированное кольцо. Пусть J_0—некоторый максимальный идеал кольца B. Положим $e^{2\pi i s}=x_1$. Тогда $x_1^{-1}=e^{-2\pi i s}$ и $|x_1(J_0)|=1$, так как $|x_1(J_0)|\leqslant \leqslant \|x_1\|=1$ и $|x_1^{-1}(J_0)|=|x_1(J_0)^{-1}|\leqslant \|x_1^{-1}\|=1$. Следовательно, найдется такое значение $s_0\in[0\ 1]$, что $x_1(J_0)=e^{2\pi i s_0}$. Таким образом, для элемента $x_n=e^{2\pi i s n}=x_1^n$ выполняется условие $x_n(J_0)=e^{2\pi i s_0 n}$, и поэтому $x(J_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i s_0 n}=x(s_0)$. Итак, для всякого максимального идеала J_0 кольца B существует такая точка s_0 $(0\leqslant s_0\leqslant 1)$, что гомоморфизм $x\to x(J_0)$ определяется равенством $x(J_0)=x(s_0)$ для всех $x\in B$. Ясно также, что отображение $x\to x(s_0)$ определяет гомоморфизм алгебры B в поле комплексных чисел. Следовательно, пространство максимальных идеалов кольца B можно отождествить с пространством $\{e^{2\pi i s};\ 0\leqslant s\leqslant 1\}$.

Следствие (теорема Винера). Если сумма абсолютно сходящегося ряда Фурье $x(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i s n}$ не обращается в нуль на отрезке $[0,\ 1]$, то функция $1/x(s)$ тоже разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. В самом деле, x не принадлежит никакому максимальному идеалу нормированного кольца, рассмотренного в примере 2.

Пример 3. Положим $B_1=C[0,\ 1]$ и определим для функций $x,\ y\in B_1$ операции и норму следующим образом:

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s),\quad (\alpha x)(s)=\alpha x(s),$$

$$(xy)(s)=\int_0^s x(s-t)\,y(t)\,dt,\quad \|x\|=\sup_{s\in[0,\ 1]}|x(s)|.$$

Тогда B_1 образует коммутативную B-алгебру без единицы. Присоединим к ней формально единицу e как символ, определенный правилами $ex=xe=x$, $\|e\|=1$, и положим $B=\{z=\lambda e+x;\ x\in B_1\}$. Множество B с операциями

$$(\lambda_1 e+x_1)+(\lambda_2 e+x_2)=(\lambda_1+\lambda_2)e+(x_1+x_2),$$

$$\alpha(\lambda e+x)=\alpha\lambda e+\alpha x,$$

$$(\lambda_1 e+x_1)(\lambda_2 e+x_2)=\lambda_1\lambda_2 e+\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1+x_1 x_2$$

и нормой

$$\|\lambda e+x\|=|\lambda|+\|x\|$$

представляет собой нормированное кольцо. Возьмем произвольный элемент $x\in B_1$ и положим $M=\sup_{s\in S}|x(s)|=\|x\|$. По индукции получаем [1])

$$|x^2(s)| \leqslant M^2 s, \quad |x^3(s)| \leqslant M^3 \frac{s^2}{2}, \ \ldots, \ |x^n(s)| \leqslant M^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}, \ \ldots .$$

Таким образом, всякий элемент $x \in B_1$ является обобщенным нильпотентным элементом кольца B, поскольку $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$.

3. Спектральное разложение ограниченных нормальных операторов

Пусть X — гильбертово пространство, и пусть система M ограниченных нормальных операторов, принадлежащих $L(X, X)$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{если } T, S \in M, \quad \text{то} \quad TS = ST \text{ (перестановочность);} \tag{1}$$

$$\text{если } T \in M, \quad \text{то} \quad T^* \in M. \tag{2}$$

Например, система M, состоящая из некоторого ограниченного нормального оператора $T \in L(X, X)$ и сопряженного ему оператора T^*, очевидно, удовлетворяет условиям (1) и (2).

Пусть M' — совокупность всех операторов из $L(X, X)$, коммутирующих с каждым из операторов $T \in M$, и пусть $B = M'' = (M')'$ — множество всех операторов из $L(X, X)$, коммутирующих со всяким оператором $S \in M'$.

Предложение 1. Всякий элемент семейства B является нормальным оператором. Множество B с операциями сложения операторов, умножения операторов и умножения операторов на числа, операторной нормой $\|T\|$ и единицей I (I — тождественный оператор) представляет собой нормированное кольцо над полем комплексных чисел.

Доказательство. Из условия (1) видно, что $M \subseteq M'$, поэтому $M' \supseteq M''$. Следовательно, $M''' = (M'')' \supseteq M''$, и, таким образом, $B = M''$ — коммутативная алгебра. Тождественный оператор I принадлежит B и служит единицей алгебры B. Из условия (2) вытекает, что всякий оператор, принадлежащий B, должен быть нормальным. Поскольку произведение операторов TS и операция $T \to T^*$ перехода к сопряженному оператору непрерывны по отношению к норме операторов, нормированное кольцо B полно по операторной норме.

Теорема 1. Гельфандовское представление

$$B \ni T \to T(J) \tag{3}$$

устанавливает изоморфизм нормированного кольца B и алгебры $C(\{J\})$ всех непрерывных комплексных функций $T(J)$, определенных на

[1]) Степени $x^k(s)$ понимаются здесь в смысле определенного выше умножения. — *Прим. перев.*