получаем [1])

$$|x^2(s)| \leqslant M^2 s, \quad |x^3(s)| \leqslant M^3 \frac{s^2}{2}, \ \ldots, \ |x^n(s)| \leqslant M^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}, \ \ldots .$$

Таким образом, всякий элемент $x \in B_1$ является обобщенным нильпотентным элементом кольца B, поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} (n!)^{1/n} = \infty$.

3. Спектральное разложение ограниченных нормальных операторов

Пусть X — гильбертово пространство, и пусть система M ограниченных нормальных операторов, принадлежащих $L(X, X)$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{если } T, S \in M, \quad \text{то} \quad TS = ST \text{ (перестановочность)}; \tag{1}$$

$$\text{если } T \in M, \quad \text{то} \quad T^* \in M. \tag{2}$$

Например, система M, состоящая из некоторого ограниченного нормального оператора $T \in L(X, X)$ и сопряженного ему оператора T^*, очевидно, удовлетворяет условиям (1) и (2).

Пусть M' — совокупность всех операторов из $L(X, X)$, коммутирующих с каждым из операторов $T \in M$, и пусть $B = M'' = (M')'$ — множество всех операторов из $L(X, X)$, коммутирующих со всяким оператором $S \in M'$.

Предложение 1. Всякий элемент семейства B является нормальным оператором. Множество B с операциями сложения операторов, умножения операторов и умножения операторов на числа, операторной нормой $\|T\|$ и единицей I (I — тождественный оператор) представляет собой нормированное кольцо над полем комплексных чисел.

Доказательство. Из условия (1) видно, что $M \subseteq M'$, поэтому $M' \supseteq M''$. Следовательно, $M''' = (M'')' \supseteq M''$, и, таким образом, $B = M''$ — коммутативная алгебра. Тождественный оператор I принадлежит B и служит единицей алгебры B. Из условия (2) вытекает, что всякий оператор, принадлежащий B, должен быть нормальным. Поскольку произведение операторов TS и операция $T \to T^*$ перехода к сопряженному оператору непрерывны по отношению к норме операторов, нормированное кольцо B полно по операторной норме.

Теорема 1. Гельфандовское представление

$$B \ni T \to T(J) \tag{3}$$

устанавливает изоморфизм нормированного кольца B и алгебры $C(\{J\})$ всех непрерывных комплексных функций $T(J)$, определенных на

---

[1]) Степени $x^k(s)$ понимаются здесь в смысле определенного выше умножения. — *Прим. перев.*

бикомпактном пространстве $\{J\}$ всех максимальных идеалов J алгебры B, причем

$$\|T\| = \sup_{J \in \{J\}} |T(J)|; \tag{4}$$

значения $T(J)$ вещественны при всех $J \in \{J\}$ тогда и только тогда, когда оператор T самосопряженный; (5)

$T(J) \geqslant 0$ при всех $J \in \{J\}$ тогда и только тогда, когда оператор T самосопряженный и *положительный*, т. е. $(Tx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$. (6)

Доказательство. Покажем сначала, что для всякого нормального ограниченного оператора T выполняется равенство

$$\|T^2\| = \|T\|^2. \tag{7}$$

Если оператор T нормален, то оператор $H = TT^* = T^*T$ является самосопряженным. Поэтому, согласно теореме 3 гл. VII, § 3,

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Tx, Tx) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(T^*Tx, x)| = \|H\| = \|T^*T\| = \|TT^*\|.$$

Поскольку $(T^*)^2 = (T^2)^*$, оператор T^2 является нормальным, как и T. Таким образом, $\|T^2\|^2 = \|T^{*2}T^2\|$, что ввиду перестановочности $TT^* = T^*T$ равно $\|(T^*T)^2\| = \|H^2\|$. Поскольку H^2 — самосопряженный оператор, можно опять применить теорему 3 гл. VII, § 3:

$$\|H^2\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, Hx) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(H^2x, x)| = \|H^2\|.$$

Следовательно, $\|T^2\|^2 = \|H^2\| = \|H\|^2 = (\|T\|^2)^2$, т. е. $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Предел $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$, как мы знаем ((3), § 2, гл. VIII), существует; поэтому из (7) видно, что $\|T\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$. Применяя теперь теоремы 1 и 4 предыдущего параграфа, мы убеждаемся в том, что отображение (3) является изоморфизмом и выполняется условие (4).

Доказательство свойства (5). Пусть самосопряженный оператор $T \in B$ при некотором $J_0 \in \{J\}$ удовлетворяет условию $T(J_0) = a + ib$, где $b \neq 0$. Тогда самосопряженный оператор $S = (T - aI)/b \in B$ удовлетворяет уравнению $(I + S^2)(J_0) = 1 + i^2 = 0$, и поэтому оператор $(I + S^2)$ не имеет в B обратного элемента. Но по теореме 2, гл. VII, § 3, оператор $(I + S^2)$ должен иметь обратный оператор, непременно принадлежащий B. Полученное противоречие говорит о том, что для самосопряженного оператора $T \in B$ функция $T(J)$ должна быть вещественной. Допустим теперь, что некоторый оператор $T \in B$ не является самосопряженным. Представим T в виде

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i\,\frac{T - T^*}{2i}.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой самосопряженный оператор, поэтому $(T - T^*)/2i$ — тоже самосопряженный оператор, отличный от нуля. Поскольку отображение (3) определяет изоморфизм, найдется такой максимальный идеал $J_0 \in \{J\}$, что $\frac{T - T^*}{2i}(J_0) \neq 0$. Следовательно, значение $T(J_0) = \frac{T + T^*}{2}(J_0) + i\frac{T - T^*}{2i}(J_0)$ не вещественно.

Доказательство свойства (6). Покажем сначала, что

$$T^*(J) = \overline{T(J)} \text{ при всех } J \in \{J\}. \tag{8}$$

Это ясно, так как самосопряженным операторам $(T + T^*)/2$ и $(T - T^*)/2i$ соответствуют вещественные функции. Отсюда и из условия (4), согласно результатам предыдущего параграфа, следует, что нормированное кольцо B может быть представлено как кольцо всех непрерывных комплексных функций на $\{J\}$, удовлетворяющих условиям (5) и (8). Допустим, что $T(J) \geqslant 0$ при всех $J \in \{J\}$. Тогда функция $S(J) = T(J)^{1/2}$ непрерывна на $\{J\}$. Поэтому, так как представление (3) дает изоморфизм, $S^2 = T$. Согласно (5), мы имеем $S = S^*$. Значит, $(Tx, x) = (S^2x, x) = (Sx, Sx) \geqslant 0$. Для того чтобы доказать теперь, что условие $(Tx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$ влечет за собой неравенство $T(J) \geqslant 0$, $J \in \{J\}$, положим $T_1(J) = \max(T(J), 0)$ и $T_2(J) = T_1(J) - T(J)$. Тогда по доказанному выше операторы T_1 и T_2 оба принадлежат B и являются самосопряженными и положительными: $(T_jx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$ $(j = 1, 2)$. Кроме того, $T_2 = T_1 - T$ и $T_1T_2 = 0$, так как $T_1(J)T_2(J) = 0$.

Итак, мы имеем

$$0 \leqslant (TT_2x, T_2x) = (-T_2^2x, T_2x) = -(T_2^3x, x) = -(T_2T_2x, T_2x) \leqslant 0.$$

Значит, $(T_2^3x, x) = 0$, и по теореме 3 гл. VII, § 3, должно быть $T_2^3 = 0$, а так как $\|T_2\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_2^n\|^{1/n}$, отсюда следует, что $T_2 = 0$. Таким образом, мы показали, что $T = T_1$ и $T(J) \geqslant 0$ при всех $J \in \{J\}$.

Условимся в дальнейшем писать $T \geqslant 0$, если T — самосопряженный положительный оператор. Будем также писать $S \geqslant T$, если $(S - T) \geqslant 0$.

Теорема 2. Пусть $\{T_n\} \in B$ — последовательность самосопряженных операторов, такая, что

$$0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_n \leqslant \ldots \leqslant S \in B. \tag{9}$$

Тогда при любом $x \in X$ существует предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_nx = Tx$, т. е. существует предел $T = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$, и, кроме того, $T \in B$, $S \geqslant T \geqslant T_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что, согласно (6),

$$\text{если } E,\ F \in B \text{ и } E \geqslant 0,\ F \geqslant 0, \text{ то } E+F \geqslant 0 \text{ и } EF \geqslant 0. \quad (10)$$

Поэтому $0 \leqslant T_1^2 \leqslant T_2^2 \leqslant \ldots \leqslant T_n^2 \leqslant \ldots \leqslant S^2$. Следовательно, при любом $x \in X$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n^2 x, x)$. Кроме того,

$$\lim_{n,\,k\to\infty} (T_{n+k}^2 x, x) = \lim_{n,\,k\to\infty} (T_{n+k} T_n x, x) = \lim_{n\to\infty} (T_n^2 x, x),$$

так как в силу (6) справедливо неравенство $T_{n+k}^2 \geqslant T_{n+k} T_n \geqslant T_n^2$. Таким образом, $\lim\limits_{n,\,m\to\infty} ((T_n - T_m)^2 x, x) = \lim\limits_{n,\,m\to\infty} \| T_n x - T_m x \|^2 = 0$, и предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ действительно существует. Из доказательства видно, что $T \in B$ и $S \geqslant T \geqslant T_n$.

Теорема 3. Пусть некоторая последовательность вещественных функций $\{T_n(J)\}$, где $T_n \in B$, удовлетворяет условию

$$0 \leqslant T_1(J) \leqslant T_2(J) \leqslant \ldots \leqslant T_n(J) \leqslant \ldots \leqslant a \text{ при } J \in \{J\}, \quad (11)$$

где a — конечная постоянная. Тогда из теоремы 2 и условия (6) следует существование предела $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. В этом случае

$$D = \{J \in \{J\};\ T(J) \neq \lim_{n\to\infty} T_n(J)\}$$

есть множество первой категории и множество $D^C = \{J\} - D$ плотно в $\{J\}$.

Доказательство. Согласно теореме 2, $T \geqslant T_n$, и поэтому $T(J) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ при $J \in \{J\}$. По теореме Бэра (§ 2 введения) точки разрыва предельной функции $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ образуют множество первой категории. Поэтому если допустить, что D не является множеством первой категории, то найдется по крайней мере одна точка $J_0 \in D$, в которой предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ непрерывен. Иными словами, существуют положительное число δ и открытое множество $V(J_0) \ni J_0$, принадлежащее $\{J\}$, такие, что

$$T(J) \geqslant \delta + \lim_{n\to\infty} T_n(J) \text{ при всех } J \in V(J_0).$$

Поскольку бикомпактное пространство $\{J\}$ нормально и $T(J) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ при $J \in \{J\}$, мы можем, согласно теореме Урысона, построить открытое множество $V_1(J_0) \ni J_0$ и функцию $W(J) \in C(\{J\})$, такие, что $0 \leqslant W(J) \leqslant \delta$ при всех $J \in \{J\}$, $V_1(J_0)^a \subseteq V(J_0)$, $W(J) = \delta/2$ в области $V_1(J_0)$ и $W(J) = 0$ на множестве $V(J_0)^C$. Следовательно, $T(J) - W(J) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ при всех $J \in \{J\}$, и, согласно (6),

$T - W \geqslant T_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как $W(J) \not\equiv 0$, то вследствие изоморфизма (3) $W \neq 0$. Так как $W \geqslant 0$, то, используя (6) еще раз, мы получаем, что $T - W \geqslant s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$, а это противоречит соотношению $T = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

Наконец, поскольку пространство $\{J\}$ бикомпактно, дополнение $D^C = \{J\} - D$ множества первой категории D должно быть плотным в $\{J\}$.

Перейдем теперь к изложению результатов Иосида [12].

Спектральное разложение (спектральное представление) операторов нормированного кольца B

Рассмотрим множество $C'(\{J\})$ всех комплексных ограниченных функций $T'(J)$ на $\{J\}$, таких, что каждая из функций $T'(J)$ отличается от некоторой непрерывной функции $T(J)$ только на множестве первой категории. Условимся отождествлять функции множества $C'(\{J\})$, отличающиеся друг от друга на множестве первой категории. Тогда семейство $C'(\{J\})$ разбивается на соответствующие классы функций. Ввиду того что дополнение всякого множества первой категории плотно в бикомпактном пространстве $\{J\}$, каждый класс T' содержит в точности одну непрерывную функцию $T(J)$, соответствующую вследствие изоморфизма $B \longleftrightarrow C(\{J\})$ некоторому элементу $T \in B$.

Для произвольного оператора $T \in B$ и всякого комплексного числа $z = \lambda + i\mu$ обозначим через E_z элемент из B, который соответствует классу E'_z, содержащему характеристическую функцию $E'(J)$ множества $\{J \in \{J\};\ \operatorname{Re} T(J) < \lambda,\ \operatorname{Im} T(J) < \mu\}$. Ясно, что для всякого $T \in B$ найдется такая последовательность непрерывных функций f_n комплексной переменной, что $E'_z(J) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(T(J))$, и поэтому $E'_z(J) \in C'(\{J\})$. Тогда если

$$\lambda_1 = -\alpha - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n = \alpha = \sup_{J \in \{J\}} |\operatorname{Re} T(J)|,$$

$$\mu_1 = -\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n = \beta = \sup_{J \in \{J\}} |\operatorname{Im} T(J)|,$$

$$\left(\sup_j (\lambda_j - \lambda_{j-1})^2 + \sup_i (\mu_i - \mu_{i-1})^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ произвольно}),$$

то

$$\Big| T(J) - \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j + i\mu_j)\big(E'_{\lambda_j + i\mu_j}(J) + E'_{\lambda_{j-1} + i\mu_{j-1}}(J) - {}$$
$$- E'_{\lambda_{j-1} + i\mu_j}(J) - E'_{\lambda_j + i\mu_{j-1}}(J)\big)\Big| \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех } J \in \{J\}.$$

Отсюда, согласно определению $E'_z(J)$, мы получаем

$$|T(J) - \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j + i\mu_j)(E_{\lambda_j + i\mu_j}(J) + E_{\lambda_{j-1} + i\mu_{j-1}}(J) - \\ - E_{\lambda_{j-1} + i\mu_j}(J) - E_{\lambda_j + i\mu_{j-1}}(J)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad J \in \{J\},$$

так как дополнение множества первой категории плотно в бикомпактном пространстве $\{J\}$. Поэтому вследствие (4)

$$\|T - \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j + i\mu_j)(E_{\lambda_j + i\mu_j} + E_{\lambda_{j-1} + i\mu_{j-1}} - \\ - E_{\lambda_{j-1} + i\mu_j} - E_{\lambda_j + i\mu_{j-1}})\| \leqslant \varepsilon.$$

Полученный результат запишем в следующей форме:

$$T = \int\int z\, dE_z. \tag{12}$$

Выражение (12) мы назовем *спектральным разложением* нормального оператора T.

4. Спектральное разложение унитарного оператора

Если унитарный оператор T принадлежит нормированному кольцу B, то, поскольку

$$T(J)\, T^*(J) = T(J)\, \overline{T(J)} = 1, \tag{1}$$

значения, принимаемые функцией $T(J)$ на $\{J\}$, — это комплексные числа, по модулю равные единице. Благодаря этому можно упростить спектральное разложение $\int\int z\, dE_z$ унитарного оператора T.

Характеристическая функция $E'_\theta(J)$ множества $\{J \in \{J\};\ \arg(T(J)) \in \in (0, \theta)\}$ $(0 < \theta < 2\pi)$ принадлежит $C'(\{J\})$. Полагая $E'_0(J) = 0$ и $E'_{2\pi}(J) = I$, мы получаем

$$\left| T(J) - \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j} (E'_{\theta_j}(J) - E'_{\theta_{j-1}}(J)) \right| \leqslant \max_j |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_{j-1}}|$$
$$(0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = 2\pi).$$

Пусть $E_\theta(J)$ — непрерывная функция, определенная на $\{J\}$ и отличающаяся от $E'_\theta(J)$ лишь на множестве первой категории. Обозначим через E_θ оператор из кольца B, соответствующий $E_\theta(J)$ при