Отсюда, согласно определению $E'_z(J)$, мы получаем

$$|T(J)-\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j+i\mu_j)\big(E_{\lambda_j+i\mu_j}(J)+E_{\lambda_{j-1}+i\mu_{j-1}}(J)-$$
$$-E_{\lambda_{j-1}+i\mu_j}(J)-E_{\lambda_j+i\mu_{j-1}}(J)\big)|\leqslant\varepsilon \quad\text{при}\quad J\in\{J\},$$

так как дополнение множества первой категории плотно в бикомпактном пространстве $\{J\}$. Поэтому вследствие (4)

$$\|T-\sum_{j=2}^{n}(\lambda_j+i\mu_j)\big(E_{\lambda_j+i\mu_j}+E_{\lambda_{j-1}+i\mu_{j-1}}-$$
$$-E_{\lambda_{j-1}+i\mu_j}-E_{\lambda_j+i\mu_{j-1}}\big)\|\leqslant\varepsilon.$$

Полученный результат запишем в следующей форме:

$$T=\iint z\,dE_z. \tag{12}$$

Выражение (12) мы назовем *спектральным разложением* нормального оператора T.

4. Спектральное разложение унитарного оператора

Если унитарный оператор T принадлежит нормированному кольцу B, то, поскольку

$$T(J)\,T^*(J)=T(J)\,\overline{T(J)}=1, \tag{1}$$

значения, принимаемые функцией $T(J)$ на $\{J\}$, — это комплексные числа, по модулю равные единице. Благодаря этому можно упростить спектральное разложение $\iint z\,dE_z$ унитарного оператора T.

Характеристическая функция $E'_\theta(J)$ множества $\{J\in\{J\};\ \arg(T(J))\in\in(0,\theta)\}$ $(0<\theta<2\pi)$ принадлежит $C'(\{J\})$. Полагая $E'_0(J)=0$ и $E'_{2\pi}(J)=I$, мы получаем

$$\Big|T(J)-\sum_{j=1}^{n}e^{i\theta_j}\big(E'_{\theta_j}(J)-E'_{\theta_{j-1}}(J)\big)\Big|\leqslant\max_j|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_{j-1}}|$$
$$(0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_n=2\pi).$$

Пусть $E_\theta(J)$ — непрерывная функция, определенная на $\{J\}$ и отличающаяся от $E'_\theta(J)$ лишь на множестве первой категории. Обозначим через E_θ оператор из кольца B, соответствующий $E_\theta(J)$ при изоморфизме $B \ni T \longleftrightarrow T(J)$. Тогда, как и в предыдущем параграфе, мы получим

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\left(E_{\theta_j} - E_{\theta_{j-1}}\right) \right\| \leqslant \max_j \left| e^{i\theta_j} - e^{i\theta_{j-1}} \right|.$$

Учитывая, что $e^{2\pi i} = 1$, мы можем записать полученный результат в виде

$$T = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dF(\theta), \tag{2}$$

где $F(\theta) = E_{\theta+0} - E_{+0}$ при $0 < \theta < 2\pi$, $F(0) = 0$, $F(2\pi) = I$.

Через $E_{\theta+0}$ здесь обозначен оператор, который определяется условием $E_{\theta+0}x = s\text{-}\lim\limits_{\theta' \downarrow \theta} E_{\theta'}x$ (существование этого предела будет доказано ниже).

Теорема 1. Система операторов $F(\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ удовлетворяет следующим условиям:

каждый из операторов $F(\theta)$ — проекционный оператор, перестановочный со всяким ограниченным линейным оператором, коммутирующим с оператором T; (3)

$$F(\theta)\,F(\theta') = F(\min(\theta, \theta')); \tag{4}$$

$$F(0) = 0, \quad F(2\pi) = I; \tag{5}$$

$F(\theta + 0) = F(\theta)$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ в том смысле, что $s\text{-}\lim\limits_{\theta' \downarrow \theta} F(\theta')\,x = F(\theta)\,x$ для всех $x \in X$. (6)

Доказательство. Достаточно доказать, что операторы E_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ удовлетворяют следующим условиям:

каждый оператор E_θ является проекционным оператором и принадлежит B; (3′)

$$E_\theta E_{\theta'} = E_{\min(\theta, \theta')}; \tag{4′}$$

$$E_0 = 0, \qquad E_{2\pi} = I; \tag{5′}$$

$$E_\theta x = s\text{-}\lim_{\theta' \downarrow \theta} E_{\theta'} x \text{ при всех } x \in X \text{ и } 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{6′}$$

Из определений следует, что $E'_\theta(J) = \overline{E'_\theta(J)}$ и $E'_\theta(J)^2 = E'_\theta(J)$. Поэтому, применяя результаты предыдущего параграфа, мы видим, что $E_\theta = E_\theta^*$ и $E_\theta^2 = E_\theta$; этим доказывается (3′). Свойство (4′) выводится на основании тех же соображений из равенства $E'_\theta(J)E'_{\theta'}(J) = E'_{\min(\theta, \theta')}(J)$; аналогично доказываются и условия (5′). Пусть теперь $\theta_n \downarrow \theta$. Тогда $E'_{\theta_n}(J) \geqslant E'_{\theta_{n+1}}(J) \geqslant E'_\theta(J)$, и поэтому, как было установлено в предыдущем параграфе, предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} E_{\theta_n} = E$ существует и $E(J) = E'_\theta(J) = \lim\limits_{\theta_n \downarrow \theta} E'_{\theta_n}(J)$ всюду на $\{J\}$, за исключением, быть может, некоторого множества первой категории. Поэтому $E = E_\theta$.

Пример 1. Рассмотрим линейный оператор T, определяемый условием

$$Ty(s) = e^{i\theta} y(s), \text{ где } y(s) \in L^2(-\infty, \infty).$$

Оператор T унитарен. Определим операторы $F(\theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$: если $2\pi n < s \leqslant 2\pi(n+1)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,)$, то положим

$$F(\theta)\, y(s) = y(s) \quad \text{при} \quad s \leqslant \theta + 2\pi n \leqslant 2\pi(n+1),$$
$$F(\theta)\, y(s) = 0 \quad \text{при} \quad \theta + 2\pi n < s.$$

Легко видеть, что

$$T = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dF(\theta).$$

Пример 2. Пусть линейный оператор T_1 определяется равенством

$$T_1 x(t) = x(t+1), \qquad x(t) \in L^2(-\infty, \infty).$$

Ясно, что оператор T_1 унитарный. Преобразование Фурье

$$y(s) = Ux(t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, (2\pi)^{-1/2} \int_{-n}^{n} e^{-ist} x(t)\, dt$$

определяет оператор U, такой, что $Ux(t+1) = e^{is} Ux(t) = e^{is} y(s)$. Поэтому

$$T_1 x(t) = x(t+1) = U^{-1} e^{is} y(s) = U^{-1} Ty(s) = U^{-1} TUx(t),$$

т. е. $T_1 = U^{-1}TU$ (T — оператор из предыдущего примера). Таким образом,

$$T_1 = \int_0^{2\pi} e^{\theta i}\, dF_1(\theta), \quad \text{где} \quad F_1(\theta) = U^{-1} F(\theta) U.$$

Единственность спектрального разложения. Поскольку $T^{-1} = T^*$ и $T^{-1}(J) = T^*(J) = T(J)^{-1}$, нетрудно установить, что

$$T^{-1} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\, dF(\theta). \tag{7}$$

Пусть $\max\limits_j |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_{j-1}}| < \varepsilon$. Тогда из соотношения

$$T = \sum_j e^{i\theta_j}(F(\theta_j) - F(\theta_{j-1})) + \delta, \qquad \|\delta\| < \varepsilon,$$

мы получаем, используя свойство (4), равенство

$$T^2 = \sum_j e^{2i\theta_j}(F(\theta_j) - F(\theta_{j-1})) + \delta',$$

где

$$\|\delta'\| \leqslant \|(T - \delta)\delta\| + \|\delta(T - \delta)\| + \|\delta^2\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|T\| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon(\|T\| + \varepsilon) + \varepsilon^2.$$

Отсюда

$$T^2 = \int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\, dF(\theta),$$

и вообще

$$T^n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, dF(\theta) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8}$$

Если теперь допустить, что имеется другое спектральное разложение $T = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dF_1(\theta)$, удовлетворяющее условиям (3) — (6), то для всякой функции $p(\theta)$, представляющей собой полином относительно $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$,

$$\int_0^{2\pi} p(\theta)\, d((F(\theta)x, y) - (F_1(\theta)x, y)) = 0 \qquad (x, y \in X).$$

Это равенство по непрерывности справедливо и для всякой непрерывной функции $p(\theta)$, такой, что $p(0) = p(2\pi)$. Выберем некоторые значения θ_0 и θ_1, $0 < \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$, и определим для достаточно больших целых $n > 0$ непрерывные функции $p_n(\theta)$ следующего вида:

$p_n(\theta) = 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ и $\theta_1 + \frac{1}{n} \leqslant \theta < 2\pi$,

$p_n(\theta) = 1$ при $\theta_0 + \frac{1}{n} \leqslant \theta \leqslant \theta_1$,

$p_n(\theta)$ — линейные функции при $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \frac{1}{n}$

и $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 + \frac{1}{n}$.

Тогда, учитывая условие (6), мы при $n \to \infty$ получим равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} p_n(\theta)\, d\,[(F(\theta)x,\ y) - (F_1(\theta)x,\ y)] =$$

$$= \left[(F(\theta)x,\ y) - (F_1(\theta)x,\ y)\right]_{\theta_0}^{\theta_1} = 0,$$

справедливое для всех $x,\ y \in X$. Следовательно, полагая $\theta_0 \downarrow 0$ и используя условия (5) и (6), мы получаем, что $F(\theta_1) = F_1(\theta)$. Это и показывает, что спектральное разложение унитарного оператора определяется единственным образом.

5. Разложение единицы

Определение 1. Семейство проекционных операторов $\{E(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty\}$, определенных в гильбертовом пространстве X, называется *разложением единицы*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda,\ \mu)), \tag{1}$$

$$E(-\infty) = 0,\quad E(+\infty) = I,\ \text{где}\ E(-\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow -\infty} E(\lambda)x$$

$$\text{и}\ E(+\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda \uparrow \infty} E(\lambda)x, \tag{2}$$

$$E(\lambda + 0) = E(\lambda),\qquad \text{где}\ E(\lambda + 0)x = s\text{-}\lim_{\mu \downarrow \lambda} E(\mu)x. \tag{3}$$

Предложение 1. При любых $x,\ y \in X$ функция $(E(\lambda)x,\ y)$ представляет собой функцию от λ ограниченной вариации.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Из условия (1) следует, что $E(\alpha,\ \beta] \equiv E(\beta) - E(\alpha)$ — проекционный оператор. Учитывая это соображение, мы с помощью неравенства Шварца получаем

$$\sum_j |(E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x,\ y)| = \sum_j |(E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x,\ E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x\| \cdot \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x\|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y\|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= (\|E(\lambda_1,\ \lambda_n]x\|^2)^{1/2} \cdot (\|E(\lambda_1,\ \lambda_n]y\|^2)^{1/2} \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

В самом деле, согласно свойству *ортогональности*

$$E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j] \cdot E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j] = 0 \qquad (i \neq j), \tag{4}$$