Тогда, учитывая условие (6), мы при $n \to \infty$ получим равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} p_n(\theta)\, d\,[(F(\theta)x,\ y)-(F_1(\theta)x,\ y)] =$$

$$= \left[(F(\theta)x,\ y)-(F_1(\theta)x,\ y)\right]_{\theta_0}^{\theta_1} = 0,$$

справедливое для всех $x,\ y \in X$. Следовательно, полагая $\theta_0 \downarrow 0$ и используя условия (5) и (6), мы получаем, что $F(\theta_1) = F_1(\theta)$. Это и показывает, что спектральное разложение унитарного оператора определяется единственным образом.

5. Разложение единицы

Определение 1. Семейство проекционных операторов $\{E(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty\}$, определенных в гильбертовом пространстве X, называется *разложением единицы*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda,\ \mu)), \tag{1}$$

$$E(-\infty) = 0,\quad E(+\infty) = I,\ \text{ где } E(-\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow-\infty} E(\lambda)x$$

$$\text{и } E(+\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda\uparrow\infty} E(\lambda)x, \tag{2}$$

$$E(\lambda+0) = E(\lambda),\qquad \text{где } E(\lambda+0)x = s\text{-}\lim_{\mu\downarrow\lambda} E(\mu)x. \tag{3}$$

Предложение 1. При любых $x,\ y \in X$ функция $(E(\lambda)x,\ y)$ представляет собой функцию от λ ограниченной вариации.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Из условия (1) следует, что $E(\alpha,\ \beta] \equiv E(\beta) - E(\alpha)$ — проекционный оператор. Учитывая это соображение, мы с помощью неравенства Шварца получаем

$$\sum_j |(E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x,\ y)| = \sum_j |(E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x,\ E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x\| \cdot \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x\|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y\|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= (\|E(\lambda_1,\ \lambda_n]x\|^2)^{1/2} \cdot (\|E(\lambda_1,\ \lambda_n]y\|^2)^{1/2} \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

В самом деле, согласно свойству *ортогональности*

$$E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j] \cdot E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j] = 0 \qquad (i \neq j), \tag{4}$$

вытекающему из условия (1), имеем

$$\|x\|^2 \geqslant \|E(\lambda_n, \lambda_m] x\|^2 = \sum_{l=n}^{m-1} \|E(\lambda_l, \lambda_{l+1}] x\|^2 \tag{5}$$

при $m > n$.

Следствие. При всяком λ, $-\infty < \lambda < \infty$, существуют операторы $E(\lambda+0) = s\text{-}\lim\limits_{\lambda' \downarrow \lambda} E(\lambda')$ и $E(\lambda-0) = s\text{-}\lim\limits_{\lambda' \uparrow \lambda} E(\lambda')$.

Доказательство. Из неравенства (5) видно, что если $\lambda_n \uparrow \lambda$, то

$$\lim_{j,\, k \to \infty} \|E(\lambda_j, \lambda_k] x\|^2 = 0,$$

и аналогичное соотношение справедливо при $\lambda_n \downarrow \lambda$.

Предложение 2. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная комплексная функция, определенная при $\lambda \in (-\infty, \infty)$, и пусть $x \in X$. Тогда при $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ можно определить интеграл

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x$$

как s-lim римановых сумм

$$\sum_j f(\lambda'_j) E(\lambda_j, \lambda_{j+1}] x, \quad \text{где} \quad \alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = \beta,$$
$$\lambda'_j \in (\lambda_j, \lambda_{j+1}],$$

когда $\max\limits_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j|$ стремится к нулю.

Доказательство. Функция $f(\lambda)$ равномерно непрерывна на бикомпактном интервале $[\alpha, \beta]$. Пусть $|f(\lambda) - f(\lambda')| \leqslant \varepsilon$ при $|\lambda - \lambda'| \leqslant \delta$ для всех $\lambda, \lambda' \in [\alpha, \beta]$. Рассмотрим два различных разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta, \qquad \max_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j| \leqslant \delta,$$
$$\alpha = \mu_1 < \ldots < \mu_m = \beta, \qquad \max_j |\mu_{j+1} - \mu_j| \leqslant \delta,$$

и построим суперпозицию

$$\alpha = \nu_1 < \ldots < \nu_p = \beta, \qquad p \leqslant m + n,$$

этих разбиений. Тогда если $\mu'_k \in (\mu_k, \mu_{k+1}]$, то

$$\sum_j f(\lambda'_j) E(\lambda_j, \lambda_{j+1}] x - \sum_k f(\mu'_k)(\mu_k, \mu_{k+1}] x =$$
$$= \sum_s \varepsilon_s E(\nu_s, \nu_{s+1}] x, \qquad \text{где } |\varepsilon_s| \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно, как и при выводе неравенства (5), квадрат нормы левой части не превосходит величины

$$\varepsilon^2 \Big\| \sum_s E(\nu_s, \nu_{s+1}]\, x \Big\|^2 = \varepsilon^2 \| E(\alpha, \beta]\, x \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2,$$

откуда и вытекает справедливость предложения 2.

Следствие. Можно определить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x$ как предел $\underset{\alpha \downarrow -\infty,\ \beta \uparrow \infty}{s\text{-}\lim} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x$, если последний существует.

Теорема 1. Для заданного $x \in X$ следующие три условия эквивалентны[1]):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x \ \text{существует}; \tag{6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\, \| E(\lambda)\, x \|^2 < \infty; \tag{7}$$

формула $F(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)\, y,\ x)$ определяет ограниченный линейный функционал. (8)

Доказательство. Мы докажем импликации (6) → (8) → (7) → (6).

(6) → (8). Аппроксимируем интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x$ суммой Римана; скалярное произведение элемента y на эту сумму определяет ограниченный линейный функционал от y. Отсюда на основании теоремы о резонансе и равенства $(y, E(\lambda)\, x) = (E(\lambda)\, y, x)$ мы получаем (8).

(8) → (7). Применим оператор $E(\alpha, \beta]$ к римановой сумме, аппроксимирующей интеграл $y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, dE(\lambda)\, x$. Используя свойство (1), мы находим, что $y = E(\alpha, \beta]\, y$. Применяя (1) еще раз, получаем

$$\overline{F(y)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)\, x,\ y) = \lim_{\alpha' \downarrow -\infty,\ \beta' \uparrow \infty} \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)\, x,\ y) =$$

[1]) Интеграл (6) определен в предложении 2. Интегралы (7) и (8) в случае непрерывной функции $f(\lambda)$ строятся аналогично. — *Прим. перев.*

$$= \lim_{\alpha' \downarrow -\infty,\ \beta' \uparrow \infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)x,\ E(\alpha,\ \beta]y) =$$

$$= \lim_{\alpha' \downarrow -\infty,\ \beta' \uparrow \infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\alpha,\ \beta]E(\lambda)x,\ y) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)x,\ y) = \|y\|^2.$$

Следовательно, $\|y\|^2 \leqslant \|F\| \cdot \|y\|$, т. е. $\|y\| \leqslant \|F\|$. С другой стороны, аппроксимируя римановыми суммами интеграл

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, dE(\lambda)x,$$

мы получаем, согласно (1), равенство

$$\|y\|^2 = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, dE(\lambda)x \right\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2,$$

откуда $\int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \leqslant \|F\|^2$. Полагая $\alpha \downarrow -\infty$ и $\beta \uparrow \infty$, мы приходим к неравенству (7).

(7)$\to$(6). При $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$ мы, как и выше, получаем

$$\left\| \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\lambda)\, dE(\lambda)x - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dE(\lambda)x \right\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\alpha'}^{\alpha} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 + \int_{\beta}^{\beta'} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2.$$

Таким образом, (6) следует из (7).

Теорема 2. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная вещественная функция. Тогда равенство

$$(Hx,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x,\ y), \tag{9}$$

$$\text{где } x \in D = \left\{ x;\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty \right\}$$

и $y \in X$ — произвольный элемент,

определяет самосопряженный оператор H с областью определения $D(H)=D$ и $HE(\lambda)\supseteq E(\lambda)H$, т. е. оператор $HE(\lambda)$ служит расширением оператора $E(\lambda)H$.

Доказательство. Для любого $y\in X$ и произвольного $\varepsilon>0$ найдутся такие значения α и β ($-\infty<\alpha<\beta<\infty$), что $\|y-E(\alpha,\beta]y\|<\varepsilon$. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(\alpha,\beta]y\|^2=\int_{\alpha}^{\beta}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2.$$

Следовательно, $E(\alpha,\beta]y\in D$ и, согласно (2), $D^a=X$. Оператор H симметрический, поскольку

$$f(\lambda)=\overline{f(\lambda)}\quad\text{и}\quad (E(\lambda)x,\ y)=\overline{(E(\lambda)y,\ x)}.$$

Если $y\in D(H^*)$, то ввиду соотношения (1) и включения $E(\alpha,\beta]z\in D$ при всяком $z\in X$ имеем

$$(z,\ E(\alpha,\beta]y^*)=(E(\alpha,\beta]z,\ H^*y)=$$
$$=(HE(\alpha,\beta]z,\ y)=\int_{\alpha}^{\beta}f(\lambda)\,d(E(\lambda)z,\ y),$$

где $y^*=H^*y$. Отсюда по теореме о резонансе выражение

$$\lim_{\alpha\downarrow-\infty,\ \beta\uparrow\infty}(z,\ E(\alpha,\beta]y^*)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d(E(\lambda)z,\ y)=F(z)$$

представляет собой ограниченный линейный функционал. Следовательно, по предыдущей теореме

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2<\infty,\quad\text{т. е.}\quad y\in D.$$

Таким образом, $D=D(H)\supseteq D(H^*)$. Поскольку оператор H симметрический, $H\subseteq H^*$, и поэтому $H=H^*$, т. е. оператор H самосопряженный.

Пусть, наконец, $x\in D(H)$. Применяя оператор $E(\mu)$ к суммам Римана, аппроксимирующим интеграл $Hx=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,dE(\lambda)x$, мы в силу (1) получаем

$$E(\mu)Hx=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d(E(\mu)E(\lambda)x)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d(E(\lambda)E(\mu)x)=HE(\mu)x.$$

Следствие 1. В частном случае $f(\lambda)=\lambda$ мы имеем

$$(Hx,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,\ y),\quad x\in D(H),\quad y\in X. \tag{10}$$

Это равенство мы запишем в символической форме

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)$$

и будем называть последнее выражение ***спектральным разложением*** или ***спектральным представлением*** самосопряженного оператора H.

Следствие 2. Для оператора $H=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,dE(\lambda)$, определяемого формулой (9), справедливо равенство

$$\|Hx\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \quad \text{для всех } x\in D(H). \tag{11}$$

В частности, если H — самосопряженный ограниченный оператор, то

$$(H^n x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)^n\, d(E(\lambda)x,\ y) \text{ для всех } x,\ y\in X \tag{12}$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказательство. Поскольку $E(\lambda)Hx=HE(\lambda)x$ для всех $x\in D(H)$, мы, согласно (1), имеем

$$\begin{aligned}(Hx,\ Hx)&=\int f(\lambda)\,d(E(\lambda)x,\ Hx)=\int f(\lambda)\,d(HE(\lambda)x,\ x)=\\ &=\int f(\lambda)\,d_\lambda\left\{\int f(\mu)\,d_\mu(E(\mu)E(\lambda)x,\ x)\right\}=\\ &=\int f(\lambda)\,d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)\,d(E(\mu)x,\ x)\right\}=\int f(\lambda)^2\,d\|E(\lambda)x\|^2.\end{aligned}$$

Последнее утверждение следствия доказывается аналогично.

Пример. Легко видеть, что оператор H умножения на независимую переменную

$$Hx(t)=tx(t),\quad x(t)\in L^2(-\infty,\ \infty),$$

допускает спектральное разложение $H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$, где

$$E(\lambda)x(t)=\begin{cases}x(t) & \text{при } t\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при } t>\lambda.\end{cases} \tag{13}$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \|Hx\|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E(\lambda)x,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} t x(t)\overline{y(t)}dt = (Hx,\ y).$$

6. Спектральное разложение самосопряженного оператора

Теорема 1. Всякий самосопряженный оператор H, определенный в гильбертовом пространстве X, допускает единственное спектральное разложение.

Доказательство. Преобразование Кэли $U = U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ самосопряженного оператора H является унитарным (гл. VII, § 4). Пусть $U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dF(\theta)$ — спектральное разложение оператора U. Тогда

$$F(2\pi - 0) = s\text{-}\lim_{\theta \downarrow 0} F(2\pi - \theta) = F(2\pi) = I.$$

Действительно, в противном случае проекционный оператор $F(2\pi) - F(2\pi - 0)$ не был бы нулевым. Тогда существовал бы такой элемент $y \neq 0$, что

$$(F(2\pi) - F(2\pi - 0))\,y = y.$$

Но, поскольку $F(\theta)F(\theta') = F(\min(\theta,\ \theta'))$,

$$Uy = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d(F(\theta)(F(2\pi) - F(2\pi - 0)))\,y = (F(2\pi) - F(2\pi - 0))\,y = y.$$

Последнее означает, что $(y,\ z) = (Uy,\ Uz) = (y,\ Uz)$ и, следовательно, $(y,\ z - Uz) = 0$ для всех $z \in X$. Область значений $R(I - U)$, где U — преобразование Кэли самосопряженного оператора H, как мы знаем (гл. VII, § 4), плотна в X. Поэтому $y = 0$, что противоречит сделанному предположению.

Положим

$$\lambda = -\operatorname{ctg}\theta, \qquad E(\lambda) = F(\theta);$$

таким образом устанавливается топологическое соответствие между областями $0 < \theta < 2\pi$ и $-\infty < \lambda < \infty$, и поэтому $E(\lambda)$, так же