В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \|Hx\|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E(\lambda)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} t x(t)\overline{y(t)}dt = (Hx, y).$$

## 6. Спектральное разложение самосопряженного оператора

**Теорема 1.** Всякий самосопряженный оператор $H$, определенный в гильбертовом пространстве $X$, допускает единственное спектральное разложение.

**Доказательство.** Преобразование Кэли $U = U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ самосопряженного оператора $H$ является унитарным (гл. VII, § 4). Пусть $U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dF(\theta)$ — спектральное разложение оператора $U$. Тогда

$$F(2\pi - 0) = s\text{-}\lim_{\theta \downarrow 0} F(2\pi - \theta) = F(2\pi) = I.$$

Действительно, в противном случае проекционный оператор $F(2\pi) - F(2\pi - 0)$ не был бы нулевым. Тогда существовал бы такой элемент $y \neq 0$, что

$$(F(2\pi) - F(2\pi - 0))\, y = y.$$

Но, поскольку $F(\theta)F(\theta') = F(\min(\theta, \theta'))$,

$$Uy = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d(F(\theta)(F(2\pi) - F(2\pi - 0)))\, y = (F(2\pi) - F(2\pi - 0))\, y = y.$$

Последнее означает, что $(y, z) = (Uy, Uz) = (y, Uz)$ и, следовательно, $(y, z - Uz) = 0$ для всех $z \in X$. Область значений $R(I - U)$, где $U$ — преобразование Кэли самосопряженного оператора $H$, как мы знаем (гл. VII, § 4), плотна в $X$. Поэтому $y = 0$, что противоречит сделанному предположению.

Положим

$$\lambda = -\operatorname{ctg}\theta, \qquad E(\lambda) = F(\theta);$$

таким образом устанавливается топологическое соответствие между областями $0 < \theta < 2\pi$ и $-\infty < \lambda < \infty$, и поэтому $E(\lambda)$, так же как и $F(\theta)$, представляет собой разложение единицы. Покажем теперь, что самосопряженный оператор

$$H' = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)$$

совпадает с оператором $H$. Так как $H = i(I+U)(I-U)^{-1}$, мы должны лишь убедиться в том, что

$$(H'(y - Uy), x) = (i(y + Uy), x) \text{ для всех } x, y \in X.$$

Поскольку $D(H')^a = X$, мы можем ограничиться рассмотрением значений $x$ из области $D(H')$. Так как $F(\theta)F(\theta') = F(\min(\theta, \theta'))$, то

$$(y - Uy, F(\theta)x) = \int_0^{2\pi} (1 - e^{i\theta'}) d_{\theta'} (F(\theta')y, F(\theta)x) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - e^{i\theta'}) d_{\theta'} (F(\theta)F(\theta')y, x) = \int_0^{\theta} (1 - e^{i\theta'}) d(F(\theta')y, x).$$

Поэтому

$$(y - Uy, H'x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(y - Uy, E(\lambda)x) =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\theta \, d\left\{\int_0^{\theta} (1 - e^{i\theta'}) d(F(\theta')y, x)\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} i(1 + e^{i\theta}) d(F(\theta)y, x) = (i(y + Uy), x).$$

*Доказательство единственности спектрального разложения.* Допустим, что оператор $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)$ допускает другое спектральное разложение $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE'(\lambda)$, такое, что $E'(\lambda_0) \neq E(\lambda_0)$ при некотором $\lambda_0$. Полагая

$$\lambda = -\operatorname{ctg}\theta, \qquad E'(\lambda) = F'(\theta),$$

мы получаем, что $F'(\theta_0) \neq F(\theta_0)$, где $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}\theta_0$. Выполняя вычисления, аналогичные проведенным выше, можно показать, что преобразование Кэли оператора $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE'(\lambda)$ совпадает с $\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\theta} \, dF'(\theta)$. Таким образом, получается, что унитарный оператор $U$ допускает два различных спектральных представления $U = \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\theta} \, dF(\theta)$ и $U = \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\theta} \, dF'(\theta)$, что противоречит результатам § 4 гл. XI.

Итак, мы доказали (гл. VII, § 3 и 4) следующий важный результат, принадлежащий фон Нейману [1].

**Теорема 2.** Всякий симметрический оператор $H$ допускает замкнутое симметрическое расширение $H^{**}$. Замкнутый симметрический оператор $H$ допускает единственное спектральное представление в том и только в том случае, когда он является самосопряженным. Для того чтобы оператор $H$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его преобразование Кэли было унитарным.

**Замечание.** В приложениях иногда встречаются операторы $H$, которые не являются сами самосопряженными, но имеют самосопряженный оператор $H^*$. Такие операторы $H$ называют *в существенном самосопряженными*. По этому вопросу см. работу Като [7], где рассматриваются операторы Шредингера в квантовой механике.

## Спектральное представление квантовомеханического оператора импульса $H_1$

Оператор $H_1$ определяется следующим образом:

$$H_1 x(t) = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} x(t), \quad x(t) \in L_2(-\infty, \infty).$$

Обозначим через $U$ преобразование Фурье

$$x(t) = U \cdot y(s) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-n}^{n} e^{ist} y(s) \, ds.$$

Оператор $U$ унитарный и $U^{-1} x(t) = U^* x(t) = U x(-t)$. Обозначим через $E(\lambda)$ разложение единицы, определенное формулой (13) § 5 гл. XI, и построим семейство операторов $\{E'(\lambda)\}$, где $E'(\lambda) = UE(\lambda)U^{-1}$. Тогда $\{E'(\lambda)\}$ тоже будет разложением единицы. Мы покажем, что $H_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE'(\lambda)$. Если обе функции $y(s)$ и $sy(s)$

принадлежат $L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$, то

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}y(s)\,ds\right) =$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}sy(s)\,ds = U(sy(s)) = UsU^{-1}x(t),$$

или символически

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt} = UsU^{-1}. \qquad (1)$$

Следовательно, для самосопряженного оператора[1] $H = s\cdot = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$ мы получаем

$$U^{-1}H_1Uy(s) = s\cdot y(s) = Hy(s)$$

для всех функций $y(s)$, принадлежащих вместе с $sy(s)$ пересечению $L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$.

Для любой функции $y(s) \in D(H) = D(s\cdot)$ обозначим через $y_n(s)$ функцию, которая определяется соотношением $y_n(s) = y(s)$ при $|s| \leqslant n$, $y_n(s) = 0$ при $|s| > n$. Ясно, что обе функции $y_n(s)$ и $sy_n(s)$ принадлежат $L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$ и, кроме того, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Hy_n = Hy$. Так как самосопряженные операторы $U^{-1}H_1U$ и $H$ замкнуты и $(U^{-1}H_1U)\,y_n = Hy_n$, мы находим, что

$$(U^{-1}H_1U)\,y = Hy \quad \text{для всех } y \in D(H).$$

Отсюда видно, что оператор $U^{-1}H_1U$ является самосопряженным расширением самосопряженного оператора $H$. Переходя к самосопряженному оператору $H^*$, мы устанавливаем, что $H^* = H$ служит расширением оператора $(U^{-1}H_1U)^* = U^{-1}H_1U$. Следовательно, $U^{-1}H_1U = H$, и поэтому

$$H_1 = UHU^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d\left(UE(\lambda)U^{-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE'(\lambda).$$

---

[1]) Запись $H = s\cdot$ обозначает здесь оператор умножения на $s$. — *Прим. перев.*