7. Вещественные и полуограниченные операторы. Теорема Фридрихса

Вещественные операторы и *полуограниченные операторы*, которые определяются ниже, допускают самосопряженные расширения. Теорема Неймана позволяет построить для таких операторов спектральное представление.

Определение 1. Пусть $X = L^2(S, \mathfrak{B}, m)$. Рассмотрим симметрический оператор H, отображающий пространство X в себя. Оператор H называется *вещественным*, если выполняются следующие условия: 1) для $x(s) \in D(H)$ мы имеем $\overline{x(s)} \in D(H)$; 2) оператор H переводит вещественные функции в вещественные.

Пример. Рассмотрим вещественную непрерывную функцию $f(s)$, заданную при $-\infty < s < \infty$. Умножение функций, принадлежащих $L^2(-\infty, \infty)$, на $f(s)$ определяет в пространстве $X = L^2(-\infty, \infty)$ вещественный оператор.

Теорема 1 (фон Нейман [1]). Всякий вещественный оператор H допускает самосопряженное расширение.

Доказательство. Обозначим через $U = U_H$ преобразование Кэли оператора H. Тогда область определения $D(U) = \{(H + iI)x;\ x \in D(H)\}$ состоит из функций, комплексно сопряженных к функциям из области значений $R(U) = \{(H - iI)x;\ x \in D(H)\}$. Поэтому если определить расширение U_1 оператора U соотношениями

$$U_1 = U \text{ в области } D(U), \quad U_1\left(\sum_\alpha c_\alpha \varphi_\alpha\right) = \sum_\alpha c_\alpha \overline{\varphi_\alpha}, \text{ где}$$
$\{\varphi_\alpha\}$ — произвольная полная ортонормированная система гильбертова пространства $D(U)^\perp$,

то расширение будет унитарным. Поэтому существует такое самосопряженное расширение H_1 оператора H, что $U_1 = U_{H_1}$ (гл. VII, § 4).

Определение 2. Говорят, что симметрический оператор H *полуограничен сверху* (или *полуограничен снизу*), если существует такая вещественная постоянная α, что

$$(Hx, x) \leqslant \alpha \|x\|^2 \text{ (или } (Hx, x) \geqslant \alpha \|x\|^2) \text{ для всех } x \in D(H).$$

Если $(Hx, x) \geqslant 0$ при всех $x \in D(H)$, то H называется *положительным оператором*.

Пример. Пусть функция $q(s)$ непрерывна и неотрицательна в области $(-\infty, \infty)$. Определим для функций $x(s)$ с бикомпактными носителями, принадлежащих C^2, оператор H следующего вида:

$$(Hx)(s) = -x''(s) + q(s)\,x(s).$$

Оператор H, как нетрудно проверить при помощи интегрирования по частям, является положительным оператором в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

Теорема 2 (Фридрихс [3]). Всякий полуограниченный оператор H имеет самосопряженное расширение.

Доказательство (принадлежащее Фрейденталю [1]). Если оператор H полуограничен сверху, то оператор $-H$ полуограничен снизу, поэтому достаточно рассматривать полуограниченные снизу операторы. Если H—такой оператор, то для оператора $H_1 = H + (1-\alpha)I$ при всех $x \in D(H_1)$ выполняется неравенство $(H_1 x, x) \geqslant \|x\|^2$. Так как оператор вида αI самосопряженный, можно считать, что рассматриваемый симметрический оператор H удовлетворяет условию

$$(Hx, x) \geqslant \|x\|^2 \quad \text{при всех} \quad x \in D(H). \tag{1}$$

Введем в области $D(H)$ новое скалярное произведение $(x, y)'$ и соответствующую норму $\|x\|'$, полагая

$$\|x\|' = (Hx, x), \quad (x, y)' = (Hx, y). \tag{2}$$

Так как для симметрического оператора H выполняется условие (1), нетрудно видеть, что множество $D(H)$ с новым скалярным произведением $(x, y)'$ и нормой $\|x\|'$ превращается в предгильбертово пространство. Обозначим через $D(H)'$ пополнение этого предгильбертова пространства.

Покажем, что пространство $D(H)'$, рассматриваемое как абстрактное множество без топологии, является подмножеством множества X, состоящего из всех элементов исходного гильбертова пространства. Фундаментальная последовательность $\{x_n\}'$ в предгильбертовом пространстве $D(H)$ удовлетворяет условиям $\|x_n - x_m\|' \geqslant \|x_n - x_m\|$ и $\lim\limits_{n,\, m \to \infty} \|x_n - x_m\|' = 0$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в исходном гильбертовом пространстве X. Если мы докажем, что для произвольной фундаментальной последовательности $\{y_n\} \subset D(H)'$

$$\begin{gathered} \text{из соотношения } \lim_{n \to \infty} \|y_n\|' \neq 0 \text{ не может следовать} \\ \text{равенство } \lim_{n \to \infty} \|y_n\| = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

это будет означать, что отображение

$$\{x_n\}' \to \{x_n\} \tag{4}$$

взаимно однозначно переводит множество всех фундаментальных последовательностей пространства $D(H)$ в некоторое подмножество множества фундаментальных последовательностей пространства X. При этом условимся всякие две фундаментальные последовательности $\{x_n\}'$, $\{z_n\}' \subseteq D(H)$ ($\{x_n\}$, $\{z_n\} \subseteq X$) отождествлять, если $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - z_n\|' = 0$ $\left(\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - z_n\| = 0\right)$. Так как пространство X полно, то всякую фундаментальную последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ можно отождествить с элементом $x \in X$, таким, что $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Следовательно, $D(H)'$ как абстрактное множество (без топологии) можно рассматривать, согласно (4), как подмножество из X.

Докажем теперь (3), вспоминая, что скалярные произведения непрерывны в пространствах $D(H)'$ и X, и поэтому если $\lim_{n,\,m\to\infty} \|x_n - x_m\|' = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|' = \alpha > 0$ и $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, то

$$\alpha^2 = \lim_{n,\,m\to\infty} (x_n,\, x_m)' = \lim_{n,\,m\to\infty} (Hx_n,\, x_m) = \lim_{n\to\infty} (Hx_n,\, 0) = 0,$$

что противоречит предположению $\alpha \neq 0$.

Положим далее

$$\tilde{D} = D(H^*) \cap D(H)'. \tag{5}$$

Так как $D(H) \subseteq D(H^*)$, то $D(H) \subseteq \tilde{D} \subseteq D(H^*)$. Поэтому можно определить расширение $\tilde{H}$ оператора H, рассматривая сужение оператора H^* на область $\tilde{D} = D(\tilde{H})$. Остается показать, что $\tilde{H}$ — самосопряженный оператор.

Сначала убедимся в том, что оператор $\tilde{H}$ симметрический. Пусть $x,\ y \in \tilde{D}$; тогда найдутся последовательности $\{x_n\}',\ \{y_n\}' \subseteq D(H)$, такие, что $\|x - x_n\|' \to 0$, $\|y - y_n\|' \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, ввиду непрерывности скалярного произведения в пространстве $D(H)'$ существуют конечные пределы $\lim_{n,\,m\to\infty} (x_n,\, y_m)' = \lim_{n,\,m\to\infty} (Hx_n,\, y_m) = \lim_{n,\,m\to\infty} (x_n,\, \tilde{H}y_m)$. Общее значение этих пределов равно величине

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (Hx_n,\, y_m) = \lim_{n\to\infty} (Hx_n,\, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n,\, \tilde{H}y) = (x,\, \tilde{H}y),$$

а также величине

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (Hx_n,\, y_m) = \lim_{m\to\infty} (x,\, Hy_m) = \lim_{m\to\infty} (\tilde{H}x,\, y_m) = (\tilde{H}x,\, y),$$

откуда видно, что $\tilde{H}$ — симметрический оператор. Значит, $\tilde{H} \subseteq (\tilde{H})^*$.

Возьмем теперь произвольные элементы $x \in D(H)$, $y \in X$. Для них верно неравенство

$$|(x,\, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \leqslant \|x\|' \cdot \|y\|,$$

и поэтому выражение $f(x) = (x,\, y)$ определяет на предгильбертовом пространстве $D(H)$ ограниченный линейный функционал. Функционал $f(x)$ можно благодаря непрерывности продолжить до ограниченного линейного функционала, определенного во всем гильбертовом пространстве $D(H)'$. Применяя к гильбертову пространству $D(H)'$ теорему Рисса о представлении линейного функционала, мы убеждаемся в существовании единственного элемента $y' \in D(H)'$, такого, что

$$f(x) = (x, y) = (x, y')' = (Hx, y') \quad \text{для всех} \quad x \in D(H).$$

Это доказывает, что $y' \in D(H^*)$ и $H^* y' = y$. Значит, $y' \in \tilde{D}$ и $\tilde{H} y' = y$. Тем самым мы показали, что $R(\tilde{H}) = X$, и на основании следствия из теоремы 1 гл. VII, § 3, оператор $\tilde{H}$ должен быть самосопряженным.

8. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Крылова — Вайнштейна. Кратность спектра

Теорема 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве X самосопряженный оператор $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$. Обозначим через $\sigma(H)$, $P_\sigma(H)$, $C_\sigma(H)$ и $R_\sigma(H)$ соответственно спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора H. Тогда (1°) $\sigma(H)$ есть некоторое множество на вещественной прямой; (2°) $\lambda \in P_\sigma(H)$ в том и только в том случае, когда $E(\lambda_0) \neq E(\lambda_0 - 0)$, и при этом собственное подпространство оператора H, соответствующее собственному значению λ_0, совпадает с $R(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))$; (3°) включение $\lambda_0 \in C_\sigma(H)$ эквивалентно условию $E(\lambda_0) = E(\lambda_0 - 0)$ и $E(\lambda_1) \neq E(\lambda_2)$ при любых $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$; (4°) множество $R_\sigma(H)$ пусто.

Доказательство. Мы уже знаем, что резольвентное множество $\rho(H)$ самосопряженного оператора H содержит все комплексные числа λ с $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ (гл. VIII, § 1). Отсюда вытекает утверждение (1°). Из определения разложения единицы $\{E(\lambda)\}$ следует, что $\lambda_0 I = \lambda_0 \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)$, и поэтому $(H - \lambda_0 I) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)\, dE(\lambda)$. Отсюда, как и в следствии 2 теоремы 2 § 5 гл. XI, мы получаем

$$\|(H - \lambda_0 I)\, x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|E(\lambda)\, x\|^2, \quad x \in D(H). \tag{1}$$

Так как $E(-\infty) = 0$, а функция $\|E(\lambda)\, x\|^2$ непрерывна справа по λ, то $Hx = \lambda_0 x$ в том и только в том случае, когда

$$E(\lambda)\, x = E(\lambda_0 + 0)\, x = E(\lambda_0)\, x \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant \lambda_0,$$
$$E(\lambda)\, x = E(\lambda_0 - 0)\, x = 0 \quad \text{при} \quad \lambda < \lambda_0,$$

т. е. $Hx = \lambda_0 x$ тогда и только тогда, когда $(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))\, x = x$. Отсюда вытекает утверждение (2°). Докажем теперь (4°). Если $\lambda_0 \in R_\sigma(H)$, то, согласно (1°), λ_0 — вещественное число. Соотношение