в существовании единственного элемента $y' \in D(H)'$, такого, что

$$f(x) = (x, y) = (x, y')' = (Hx, y') \quad \text{для всех} \quad x \in D(H).$$

Это доказывает, что $y' \in D(H^*)$ и $H^*y' = y$. Значит, $y' \in \tilde{D}$ и $\tilde{H}y' = y$. Тем самым мы показали, что $R(\tilde{H}) = X$, и на основании следствия из теоремы 1 гл. VII, § 3, оператор $\tilde{H}$ должен быть самосопряженным.

8. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Крылова — Вайнштейна. Кратность спектра

Теорема 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве X самосопряженный оператор $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$. Обозначим через $\sigma(H)$, $P_\sigma(H)$, $C_\sigma(H)$ и $R_\sigma(H)$ соответственно спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора H. Тогда (1°) $\sigma(H)$ есть некоторое множество на вещественной прямой; (2°) $\lambda \in P_\sigma(H)$ в том и только в том случае, когда $E(\lambda_0) \neq E(\lambda_0 - 0)$, и при этом собственное подпространство оператора H, соответствующее собственному значению λ_0, совпадает с $R(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))$; (3°) включение $\lambda_0 \in C_\sigma(H)$ эквивалентно условию $E(\lambda_0) = E(\lambda_0 - 0)$ и $E(\lambda_1) \neq E(\lambda_2)$ при любых $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$; (4°) множество $R_\sigma(H)$ пусто.

Доказательство. Мы уже знаем, что резольвентное множество $\rho(H)$ самосопряженного оператора H содержит все комплексные числа λ с $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$ (гл. VIII, § 1). Отсюда вытекает утверждение (1°). Из определения разложения единицы $\{E(\lambda)\}$ следует, что $\lambda_0 I = \lambda_0 \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)$, и поэтому $(H - \lambda_0 I) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)\, dE(\lambda)$. Отсюда, как и в следствии 2 теоремы 2 § 5 гл. XI, мы получаем

$$\|(H - \lambda_0 I)\, x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2\, d\|E(\lambda)\, x\|^2, \quad x \in D(H). \tag{1}$$

Так как $E(-\infty) = 0$, а функция $\|E(\lambda)\, x\|^2$ непрерывна справа по λ, то $Hx = \lambda_0 x$ в том и только в том случае, когда

$$E(\lambda)\, x = E(\lambda_0 + 0)\, x = E(\lambda_0)\, x \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant \lambda_0,$$
$$E(\lambda)\, x = E(\lambda_0 - 0)\, x = 0 \quad \text{при} \quad \lambda < \lambda_0,$$

т. е. $Hx = \lambda_0 x$ тогда и только тогда, когда $(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))\, x = x$. Отсюда вытекает утверждение (2°). Докажем теперь (4°). Если $\lambda_0 \in R_\sigma(H)$, то, согласно (1°), λ_0 — вещественное число. Соотношение

$R(H-\lambda_0 I)^a = D\big((H-\lambda_0 I)^{-1}\big)^a \neq X$ показывает, что существует элемент $y \neq 0$, ортогональный к $R(H-\lambda_0 I)$, т. е. $((H-\lambda_0 I)x, y) = 0$ для всех $x \in D(H)$. Следовательно, $(Hx, y) = (\lambda_0 x, y) = (x, \lambda_0 y)$, и поэтому $y \in D(H^*)$ и $H^* y = \lambda_0 y$. Это означает, что $Hy = \lambda_0 y$, т. е. λ_0 является собственным значением оператора H. Но отсюда следует, что $\lambda_0 \in R_\sigma(H) \cap P_\sigma(H)$, а множества R_σ и P_σ, как мы знаем, не пересекаются. Поэтому множество $R_\sigma(H)$ пусто.

Пусть теперь вещественное число λ_0 не принадлежит спектру $\sigma(H)$. Тогда существует резольвента $(\lambda_0 I - H)^{-1}$. Значит, оператор $H_{\lambda_0} = (H - \lambda_0 I)$ имеет непрерывный обратный $(H-\lambda_0 I)^{-1}$. Согласно (4°), это условие эквивалентно тому, что $\lambda_0 \in \rho(H)$ и существует такое положительное число α, что

$$\|(H-\lambda_0 I)x\| \geqslant \alpha \cdot \|x\| \quad \text{при всех} \quad x \in D(H).$$

Последнее условие ввиду (1) эквивалентно неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 \geqslant \alpha^2 \|x\|^2 \quad \text{при всех} \quad x \in D(H). \tag{2}$$

Предположим теперь, что $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$, где $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ и $\lambda_0 - \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_0 < \alpha$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 < \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\|E(\lambda)x\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2,$$

что противоречит неравенству (2). Отсюда с использованием утверждений (1°), (2°), (4°) и (2) мы получаем (3°).

Замечание. В примере из § 5 гл. XI был построен самосопряженный оператор H, непрерывный спектр которого состоит из всех вещественных чисел.

Теорема 2. Пусть H — произвольный ограниченный самосопряженный оператор. Тогда

$$\sup_{\lambda \in \sigma(H)} \lambda = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x), \qquad \inf_{\lambda \in \sigma(H)} \lambda = \inf_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x). \tag{3}$$

Доказательство. Так как величина $(Hx, x) = (x, Hx) = \overline{(Hx, x)}$ — число вещественное, можно рассматривать

$$\alpha_1 = \inf_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x).$$

Пусть $\lambda_0 \in \sigma(H)$. Тогда по теореме 1 для любой пары (λ_1, λ_2) вещественных чисел, таких, что $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$, существует элемент $y = y_{\lambda_1, \lambda_2} \neq 0$, такой, что $(E(\lambda_2) - E(\lambda_1))y = y$. Можно считать, что

$\|y\|=1$. Следовательно,

$$(Hy,\ y)=\int \lambda d(E(\lambda)y,\ y)=\int \lambda d\|E(\lambda)y\|^2=$$

$$=\int \lambda d\|E(\lambda)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y\|^2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\|(E(\lambda)-E(\lambda_1))y\|^2.$$

Полагая $\lambda_1 \uparrow \lambda_0$ и $\lambda_2 \downarrow \lambda_0$, мы найдем, что $(Hy_{\lambda_1,\lambda_2},\ y_{\lambda_1,\lambda_2})\to\lambda_0$. Это показывает, что $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\sup\lambda_0\leqslant\alpha_2$.

Предположим, что $\alpha_2\notin\sigma(H)$. Тогда теорема 1 гарантирует существование пары $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ вещественных чисел, таких, что $\lambda_1<\alpha_2<\lambda_2$ и $E(\lambda_2)=E(\lambda_1)$. Поэтому $I=I-E(\lambda_2)+E(\lambda_1)$, $(I-E(\lambda_2))E(\lambda_1)=$ $=E(\lambda_1)(I-E(\lambda_2))=0$, следовательно, либо оператор $(I-E(\lambda_2))$, либо оператор $E(\lambda_1)$ отличен от нулевого. Если $(I-E(\lambda_2))\neq 0$, то найдется такой элемент y с нормой $\|y\|=1$, что $(I-E(\lambda_2))y=y$. В этом случае

$$(Hy,\ y)=\int \lambda d\|E(\lambda)y\|^2=\int \lambda d\|E(\lambda)(I-E(\lambda_2))y\|^2=$$

$$=\int_{\lambda_2}^{\infty} \lambda d\|E(\lambda)y\|^2\geqslant\lambda_2>\alpha_2;$$

в случае $E(\lambda_1)\neq 0$

$$(Hz,\ z)\leqslant\lambda_1<\alpha_2$$

для некоторого элемента z с нормой $\|z\|=1$, удовлетворяющего уравнению $E(\lambda_1)z=z$. Таким образом, предположение о том, что $\alpha_2\notin\sigma(H)$, приводит к противоречию, и мы доказали, что $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=$ $=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}(Hx,\ x)$. Аналогично можно показать, что $\inf\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\inf\limits_{\|x\|\leqslant 1}(Hx,\ x)$.

Теорема 3 (Крылов — Вайнштейн). Рассмотрим самосопряженный оператор H и для произвольного элемента $x\in D(H)$ с нормой $\|x\|=1$ определим числа

$$\alpha_x=(Hx,\ x)\quad\text{и}\quad\beta_x=\|Hx\|. \tag{4}$$

Тогда для всякого $\varepsilon>0$ можно указать значение $\lambda_0\in\sigma(H)$, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha_x-(\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}-\varepsilon\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+(\beta_x^2-\alpha_x^2)^{1/2}+\varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство. Из соотношений

$$\beta_x^2=(Hx,\ Hx)=(H^2x,\ x)=\int \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2,$$

$$\alpha_x=(Hx,\ x)=\int \lambda d\|E(\lambda)x\|^2,$$

$$\|x\|^2=\int d\|E(\lambda)x\|^2$$

вытекает равенство

$$\beta_x^2 - \alpha_x^2 = \int \lambda^2 d\,\|E(\lambda)\,x\|^2 - 2\alpha_x \int \lambda d\,\|E(\lambda)\,x\|^2 + \\ + \alpha_x^2 \int d\,\|E(\lambda)\,x\|^2 = \int (\lambda - \alpha_x)^2\, d\,\|E(\lambda)\,x\|^2.$$

Допуская, что функция $\|E(\lambda)\,x\|^2$ сохраняет постоянное значение в интервале $\lambda \in \left[\alpha_x - \left(\beta_x^2 - \alpha_x^2\right)^{1/2} - \varepsilon,\ \alpha_x + \left(\beta_x^2 - \alpha_x^2\right)^{1/2} + \varepsilon\right]$, мы приходим к противоречию

$$\beta_x^2 - \alpha_x^2 \geqslant \left(\left(\beta_x^2 - \alpha_x^2\right)^{1/2} + \varepsilon\right)^2 > \beta_x^2 - \alpha_x^2,$$

что и доказывает теорему [1]).

Замечание. Так называемый *принцип Рэлея* состоит в том, что при вычислении спектра оператора H за приближение принимается величина α_x. Если мы вычислим β_x, то теорема 3 позволит определить верхнюю границу погрешности такого приближения. Конкретные приложения таких оценок погрешностей см. в работе Иосида [1].

Кратность спектра. Мы начнем с изучения спектра самосопряженного оператора H в n-мерном гильбертовом пространстве X_n; такому оператору соответствует самосопряженная матрица $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(p \leqslant n)$ — собственные значения оператора H соответственно кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_p$ $\left(\sum_{j=1}^{p} m_j = n\right)$. Обозначим через $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{m_j}}$ ортонормированные собственные векторы оператора H, соответствующие собственному значению λ_j $\left(Hx_{j_s} = \lambda_j x_{j_s}\right)$, такие, что система $\left\{x_{j_s};\ s = 1, 2, \ldots, m_j\right\}$ порождает собственное подпространство $E\lambda_j = R(E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0))$ оператора H, соответствующее собственному значению λ_j. Тогда совокупность векторов $\left\{x_{j_s};\ j = 1, 2, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots, m_j\right\}$ образует в пространстве X_n полную ортонормированную систему, и поэтому всякий вектор $y \in X_n$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов x_{j_s}:

$$y = \sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{m_j} \alpha_{j_s} x_{j_s}. \tag{6}$$

Обозначая через P_{λ_j} оператор $(E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0))$ проектирования на собственное подпространство E_{λ_j}, мы получаем для любых $\alpha < \beta$

[1]) Так как функция $E(\lambda)$ оказывается не постоянной в промежутке (5), то в нем, согласно теореме 1, найдется по крайней мере одна точка $\lambda_0 \in \sigma(H)$. — *Прим. перев.*

соотношения

$$(E(\beta)-E(\alpha))\,y=\sum_{\alpha<\lambda_j\leqslant\beta}\left(\sum_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s}\right)=\sum_{\alpha<\lambda_j\leqslant\beta}P_{\lambda_j}y \tag{7}$$

и

$$P_{\lambda_j}(E(\beta)-E(\alpha))\,y=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s} & \text{при}\quad \alpha<\lambda_j\leqslant\beta,\\ 0 & \text{при}\quad \lambda_j\notin(\alpha,\ \beta].\end{cases}$$

Поэтому при фиксированных значениях $\alpha<\beta$ и фиксированном линейном подпространстве M пространства X_n множество

$$\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ y\in M\}$$

не содержит подпространства E_{λ_j}, если размерность $\dim(M)$ подпространства M меньше m_j. Кроме того, можно найти такое подпространство M размерности $\dim(M)=m_j$, чтобы при $\alpha<\lambda_j\leqslant\beta$ множество $\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ y\in M\}$ содержало собственное подпространство E_{λ_j}. В самом деле, таким является, например, подпространство, содержащее векторы $x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_{m_j}}$. Отсюда, в частности, следует, что условие $m_1=m_2=\ \ldots\ =m_p=1,\ \ p=n,$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой вектор $y\in X_n$, что множество векторов $\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ \alpha<\beta \text{ произвольны}\}$ порождает все пространство X_n.

Эти рассуждения приводят нас к следующим определениям.

Определение 1. Спектр самосопряженного оператора $H=\int\lambda\,dE(\lambda)$, заданного в некотором гильбертовом пространстве X, называется *простым*, если существует фиксированный вектор $y\in X$, такой, что линейное подпространство, натянутое на множество векторов $\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ \alpha<\beta\}$, сильно плотно в пространстве X.

Определение 2. Подпространство $X_1\subseteq X$ гильбертова пространства X называется *порождающим подпространством оператора* H, если сильное замыкание в пространстве X линейного подпространства, натянутого на множество векторов

$$M=\{(E(\beta)-E(\alpha))\,z;\ z\in X_1,\ \alpha<\beta\},$$

совпадает с X, т. е. линейная оболочка M сильно плотна в X. Наименьшее из чисел $\dim(X_1)$, где X_1 пробегает все порождающие подпространства оператора H, называется *общей кратностью спектра самосопряженного оператора* H. Общая кратность спектра оператора вида $B=(E(\beta_0)-E(\alpha_0))\,H$, где α_0 и β_0 — произвольные фиксированные числа, такие, что $\alpha_0<\beta_0$, называется *кратностью спектра самосопряженного оператора* H *в интервале* $(\alpha_0,\ \beta_0]$.

Определение 3. *Кратностью спектра самосопряженного оператора* $H = \int \lambda \, dE(\lambda)$ *в точке* $\lambda = \lambda_0$ называется предел при $n \to \infty$ последовательности кратностей спектра оператора H в интервалах $(\lambda_0 - n^{-1}, \lambda_0 + n^{-1}]$.

Пример. Оператор координаты квантовой механики, т. е. оператор H, определяемый в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ условием $Hx(t) = tx(t)$, обладает простым спектром.

Доказательство. Мы знаем, что для этого оператора спектральное разложение $H = \int \lambda \, dE(\lambda)$ определяется функцией $E(\lambda)$ вида

$$E(\lambda)\, x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при} \quad t \leqslant \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t > \lambda. \end{cases}$$

Возьмем произвольный ряд $\sum_k c_k^2 < \infty$ $(c_k > 0)$ и определим функцию $y(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ условием

$$y(t) = c_k > 0 \quad \text{при} \quad k - 1 < t \leqslant k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Нетрудно заметить, что совокупность всех линейных комбинаций векторов вида $(E(\beta) - E(\alpha))\, y$ $(\alpha < \beta)$ сильно плотна в множестве всех ступенчатых функций с бикомпактными носителями и, следовательно, сильно плотна в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

Унитарная эквивалентность самосопряженных операторов. Два самосопряженных оператора H_1 и H_2 в n-мерном гильбертовом пространстве X называются *унитарно эквивалентными*, если существует такая унитарная матрица U, что $H_1 = UH_2U^{-1}$. Известно, что операторы H_1 и H_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда эти операторы имеют одни и те же собственные значения соответственно одних и тех же кратностей. Таким образом, собственные значения и их кратности являются *унитарными инвариантами* самосопряженной матрицы.

Исследование вопроса об унитарных инвариантах самосопряженных операторов в бесконечномерных пространствах восходит к работе Хеллингера [1], опубликованной в 1909 г. См. также М. Стоун [1]. В указанных работах рассматривалось сепарабельное гильбертово пространство. Результаты, относящиеся к несепарабельным гильбертовым пространствам, см. в работах Веккен [1], Накано [1], а также Халмош [2]. Иосида [13] доказал следующую теорему.

Пусть H — произвольный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Обозначим через $(H)'$ совокупность всех ограниченных линейных операторов, принадлежащих $L(X, X)$, которые перестановочны с H. Два самосопряженных оператора H_1 и H_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение T множества $(H_1)'$ на множество $(H_2)'$, устанавливающее изоморфизм колец операторов $(H_1)'$ и $(H_2)'$ таким образом, что $(T \cdot B)^* = T \cdot B^*$ для всякого $B \in (H_1)'$.

Таким образом, алгебраическая структура кольца $(H_1)'$ представляет собой унитарный инвариант самосопряженного оператора H_1.

9. Разложение элемента пространства. Условие отсутствия непрерывного спектра

Пусть $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Ввиду свойств $E(+\infty) = I$ и $E(-\infty) = 0$ с оператором H можно связать представление всякого элемента $x \in X$ в виде

$$x = \underset{\lambda_1 \downarrow -\infty,\ \lambda_2 \uparrow \infty}{s\text{-}\lim} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dE(\lambda)\, x = \underset{\lambda_1 \downarrow -\infty,\ \lambda_2 \uparrow \infty}{s\text{-}\lim} (E(\lambda_2) - E(\lambda_1))\, x, \quad x \in X. \tag{1}$$

Иногда в конкретных случаях легче найти резольвенту $(\lambda I - H)^{-1}$, чем построить спектральное разложение $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$. Тогда вместо разложения (1) удобнее воспользоваться формулой

$$x = \underset{\alpha \downarrow -\infty,\ \beta \uparrow \infty}{s\text{-}\lim}\ \underset{v \downarrow 0}{s\text{-}\lim} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\alpha}^{\beta} ((u - iv) I - H)^{-1} x\, du + \right.$$
$$\left. + \int_{\beta}^{\alpha} ((u + iv) I - H)^{-1} x\, du \right], \qquad x \in X, \tag{1'}$$

к выводу которой мы сейчас переходим.

Доказательство формулы (1'). Если $v \neq 0$, то

$$((u + iv) I - H)^{-1} x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + iv - \lambda}\, dE(\lambda)\, x$$

для всех $x \in X$. Действительно, аппроксимируя интеграл римановой суммой и учитывая соотношение $E(\lambda) E(\lambda') = E(\min(\lambda, \lambda'))$, мы при $\operatorname{Im}(\mu) \neq 0$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\, dE(\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda' - \mu}\, dE(\lambda') \right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\, d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda' - \mu}\, d_{\lambda'} (E(\lambda) E(\lambda')) \right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\, d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\lambda' - \mu}\, dE(\lambda') \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) = I,$$