ство $(H_2)'$, устанавливающее изоморфизм колец операторов $(H_1)'$ и $(H_2)'$ таким образом, что $(T\cdot B)^* = T\cdot B^*$ для всякого $B \in (H_1)'$.

Таким образом, алгебраическая структура кольца $(H_1)'$ представляет собой унитарный инвариант самосопряженного оператора H_1.

9. Разложение элемента пространства. Условие отсутствия непрерывного спектра

Пусть $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Ввиду свойств $E(+\infty) = I$ и $E(-\infty) = 0$ с оператором H можно связать представление всякого элемента $x \in X$ в виде

$$x = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\lambda_1 \downarrow -\infty,\ \lambda_2 \uparrow \infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dE(\lambda)\, x = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\lambda_1 \downarrow -\infty,\ \lambda_2 \uparrow \infty} (E(\lambda_2) - E(\lambda_1))\, x, \quad x \in X. \tag{1}$$

Иногда в конкретных случаях легче найти резольвенту $(\lambda I - H)^{-1}$, чем построить спектральное разложение $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$. Тогда вместо разложения (1) удобнее воспользоваться формулой

$$x = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\alpha \downarrow -\infty,\ \beta \uparrow \infty} \operatorname*{s\text{-}lim}_{v \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\alpha}^{\beta} ((u - iv) I - H)^{-1} x\, du + \right.$$
$$\left. + \int_{\beta}^{\alpha} ((u + iv) I - H)^{-1} x\, du \right], \qquad x \in X, \tag{1'}$$

к выводу которой мы сейчас переходим.

Доказательство формулы (1'). Если $v \neq 0$, то

$$((u + iv) I - H)^{-1} x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + iv - \lambda}\, dE(\lambda)\, x$$

для всех $x \in X$. Действительно, аппроксимируя интеграл римановой суммой и учитывая соотношение $E(\lambda) E(\lambda') = E(\min(\lambda, \lambda'))$, мы при $\operatorname{Im}(\mu) \neq 0$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\, dE(\lambda) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda' - \mu}\, dE(\lambda') \right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\, d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda' - \mu}\, d_{\lambda'} (E(\lambda) E(\lambda')) \right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)\, d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\lambda' - \mu}\, dE(\lambda') \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) = I,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu} d_\lambda \left\{ E(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda'-\mu)\, dE(\lambda') \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu} d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda'-\mu)\, d_{\lambda'} (E(\lambda) E(\lambda')) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu} d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} (\lambda'-\mu)\, dE(\lambda') \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) = I,$$

откуда видно, что

$$((u+iv)I - H) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u+iv-\lambda} dE(\lambda)\, x = x$$

при всех $x \in X$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u+iv-\lambda} dE(\lambda)\, x = ((u+iv)I - H)^{-1} x, \quad x \in X.$$

Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((u-iv)I - H)^{-1} x\, du + \int_{\beta}^{\alpha} ((u+iv)I - H)^{-1} x\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)\, x \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{u-iv-\lambda} + \int_{\beta}^{\alpha} \frac{du}{u+iv-\lambda} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)\, x \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} d_u \log(u-iv-\lambda) + \int_{\beta}^{\alpha} d_u \log(u+iv-\lambda) \right\}.$$

Последнее выражение при $v \downarrow 0$ сильно сходится к

$$\int_{\alpha+0}^{\beta-0} 2\pi i\, dE(\lambda)\, x + \pi i (E(\beta) - E(\beta-0))\, x + \pi i ((E(\alpha) - E(\alpha-0))\, x =$$

$$= \pi i (E(\beta) + E(\beta-0))\, x - \pi i (E(\alpha) + E(\alpha-0))\, x,$$

откуда и вытекает формула (1′).

Замечание. В работе Г. Вейля [2] строилось разложение по собственным функциям для дифференциального оператора второго порядка вида

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

где $q(x)$ — непрерывная функция на открытом интервале (a, b). Эта задача разрабатывалась далее М. Стоуном [1] и была решена окончательно Титчмаршем [2] и Кодаира [1], которые привели явные формулы для этого разложения. Это разложение представляет собой конкретное применение формулы (1). Трудным моментом в этой теории является вопрос о возможности выбора граничных условий на концах $x = a$ и $x = b$, при которых оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

становится самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$. Эти исследования играют важную роль, поскольку они позволяют выработать единый подход к классическим разложениям теории специальных функций, таким, как разложения в ряды Фурье, представления в виде интегралов Фурье, разложения по полиномам Эрмита, по полиномам Лагерра и бесселевым функциям. Не вдаваясь в подробности, мы отошлем читателя к цитированным выше книге Титчмарша и работе Кодаира. См. также Наймарк [2], Данфорд — Шварц [5] и Иосида [1]. В последней книге дано элементарное изложение этого вопроса.

Если самосопряженный оператор H не имеет непрерывного спектра $C_\sigma(H)$, то разложение (1) можно заменить разложением в ряд. Имеет место

Теорема 1. Пусть $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда (1°) непрерывный спектр $C_\sigma(H)$ не содержит вещественных чисел, за исключением, быть может, нуля; (2°) совокупность всех собственных значений оператора H образует не более чем счетное множество вещественных чисел, не имеющее предельных точек, кроме $\lambda = 0$; (3°) собственные подпространства E_{λ_0} оператора H, соответствующие собственным значениям $\lambda_0 \neq 0$, конечномерны.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[\lambda', \lambda'']$ вещественной оси, не содержащий точки $\lambda = 0$. Тогда область значений $R(E(\lambda'') - E(\lambda'))$ конечномерна. Действительно, если допустить противное, то процесс ортогонализации Шмидта (гл. III, § 5) позволяет построить счетную ортонормированную систему $\{x_j\}$, содержащуюся в области $R(E(\lambda'') - E(\lambda'))$. Тогда, согласно неравенству Бесселя

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f, x_j)|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad \text{для всех } f \in X,$$

существует равный нулю предел $w\text{-}\lim\limits_{j \to \infty} x_j = 0$. Но, так как оператор H вполне непрерывен, существует подпоследовательность $\{x_{j'}\}$, для которой $s\text{-}\lim\limits_{j'\to\infty} Hx_{j'} = w\text{-}\lim\limits_{j'\to\infty} Hx_{j'} = 0$. С другой стороны,

$$\|Hx_{j'}\|^2 = \int \lambda^2 d\|E(\lambda)x_{j'}\|^2 = \int \lambda^2 d\|E(\lambda)(E(\lambda'')-E(\lambda'))x_{j'}\|^2 =$$

$$= \int_{\lambda'}^{\lambda''} \lambda^2 d\|(E(\lambda)-E(\lambda'))x_{j'}\|^2 \geqslant \|x_{j'}\|^2 \cdot \min(|\lambda'|^2, |\lambda''|^2) =$$

$$= \min(|\lambda'|^2, |\lambda''|^2),$$

что противоречит полученному ранее предельному равенству. Итак, мы показали, что подпространство $R(E(\lambda'')-E(\lambda'))$ конечномерно.

Если непрерывный спектр $C_\sigma(H)$ содержит число $\lambda_0 \neq 0$, то по теореме 1 предыдущего параграфа $s\text{-}\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon))x = 0$ для всех $x \in X$. Как показано выше, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ область значений $R(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon))$ конечномерна, причем ее размерность монотонно убывает, когда $\varepsilon \downarrow 0$. Поэтому $(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon)) = 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, и, следовательно, по теореме 1 предыдущего параграфа число λ_0 не может входить в непрерывный спектр $C_\sigma(H)$.

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\{\lambda_j\}$ — система всех отличных от нуля собственных значений самосопряженного оператора H. Тогда для любого элемента $x \in X$ справедлива формула

$$x = (E(0)-E(0-0))x + s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x. \tag{2}$$

Доказательство. Формула (2) вытекает непосредственно из представления (1).

Следствие 2 (теорема Гильберта — Шмидта). Для всякого $x \in X$

$$Hx = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x. \tag{3}$$

Доказательство. Это равенство является следствием непрерывности оператора H и соотношений $H(E(0)-E(0-0)) = 0$ и $H(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x = \lambda_j(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))x$. Последнее равенство вытекает из того, что область значений $R(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))$ совпадает с собственным подпространством E_{λ_j} оператора H, соответствующим собственному значению λ_j.

Замечание. Сильно сходящаяся последовательность (3) сходится равномерно на единичном шаре $\{x;\ \|x\| \leqslant 1\}$. Действительно,

$$\left\| Hx - \int\limits_{|\lambda| > \varepsilon} \lambda\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 = \left\| \int\limits_{|\lambda| \leqslant \varepsilon} \lambda\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 =$$

$$= \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda^2 d\, \|E(\lambda)\, x\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\, \|E(\lambda)\, x\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \int d\, \|E(\lambda)\, x\|^2 = \varepsilon^2 \|x\|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

10. Теорема Петера — Вейля — Неймана

Рассмотрим вполне ограниченную топологическую группу G, метризованную с помощью функции расстояния, удовлетворяющей условию (гл. VIII, § 5)

$$\operatorname{dis}(x, y) = \operatorname{dis}(axb, ayb) \quad \text{для всех } x, y, a, b \in G. \tag{1}$$

Пусть $f(g)$ — равномерно непрерывная ограниченная комплексная функция, определенная на группе G. Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$V = \left\{ y \in G;\ \sup_{x \in G} |f(x) - f(y^{-1}x)| < \varepsilon \right\}. \tag{2}$$

Вследствие непрерывности функции f множество V открыто и содержит единицу e группы G. Поэтому пересечение $U = V \cap V^{-1}$, где $V^{-1} = \{y^{-1},\ y \in V\}$, тоже представляет собой открытое множество, содержащее e. Введем теперь функцию

$$k(x) = 2^{-1}\left(k_1(x) + k_1(x^{-1})\right),$$

где

$$k_1(x) = \frac{\operatorname{dis}(x, U^C)}{\operatorname{dis}(x, e) + \operatorname{dis}(x, U^C)} \quad \left(\operatorname{dis}(x, U^C) = \inf_{y \in U^C} \operatorname{dis}(x, y)\right). \tag{3}$$

На основании предыдущего можно утверждать, что

$$\begin{gathered} \text{функция } k(x) \text{ ограничена и равномерно непрерывна на } G; \\ k(x) = k(x^{-1}),\ 0 \leqslant k(x) \leqslant 1 \text{ на } G;\ k(e) = 1; \\ k(x) = 0 \text{ для всех } x \in U^C. \end{gathered} \tag{4}$$

Следовательно, для любых $x, y \in G$ мы получаем неравенство

$$|k(y)(f(x) - f(y^{-1}x))| \leqslant \varepsilon k(y).$$