Замечание. Сильно сходящаяся последовательность (3) сходится равномерно на единичном шаре $\{x;\ \|x\| \leqslant 1\}$. Действительно,

$$\left\| Hx - \int_{|\lambda| > \varepsilon} \lambda\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 = \left\| \int_{|\lambda| \leqslant \varepsilon} \lambda\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda^2 d\, \|E(\lambda)\, x\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\, \|E(\lambda)\, x\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \int d\, \|E(\lambda)\, x\|^2 = \varepsilon^2 \|x\|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

10. Теорема Петера — Вейля — Неймана

Рассмотрим вполне ограниченную топологическую группу G, метризованную с помощью функции расстояния, удовлетворяющей условию (гл. VIII, § 5)

$$\operatorname{dis}(x,\ y) = \operatorname{dis}(axb,\ ayb) \quad \text{для всех } x,\ y,\ a,\ b \in G. \tag{1}$$

Пусть $f(g)$ — равномерно непрерывная ограниченная комплексная функция, определенная на группе G. Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$V = \left\{ y \in G;\ \sup_{x \in G} |f(x) - f(y^{-1}x)| < \varepsilon \right\}. \tag{2}$$

Вследствие непрерывности функции f множество V открыто и содержит единицу e группы G. Поэтому пересечение $U = V \cap V^{-1}$, где $V^{-1} = \{y^{-1},\ y \in V\}$, тоже представляет собой открытое множество, содержащее e. Введем теперь функцию

$$k(x) = 2^{-1}\left(k_1(x) + k_1(x^{-1})\right),$$

где

$$k_1(x) = \frac{\operatorname{dis}(x,\ U^C)}{\operatorname{dis}(x,\ e) + \operatorname{dis}(x,\ U^C)} \quad \left(\operatorname{dis}(x,\ U^C) = \inf_{y \in U^C} \operatorname{dis}(x,\ y)\right). \tag{3}$$

На основании предыдущего можно утверждать, что

$$\text{функция } k(x) \text{ ограничена и равномерно непрерывна на } G;$$
$$k(x) = k(x^{-1}),\ 0 \leqslant k(x) \leqslant 1 \text{ на } G;\ k(e) = 1; \tag{4}$$
$$k(x) = 0 \text{ для всех } x \in U^C.$$

Следовательно, для любых $x,\ y \in G$ мы получаем неравенство

$$|k(y)(f(x) - f(y^{-1}x))| \leqslant \varepsilon k(y).$$

Взяв от обеих частей этого неравенства средние значения (гл. VIII, § 5 и 6), мы найдем, что

$$|M_y(k(y))f(x) - M_y(k(y)f(y^{-1}x))| \leqslant \varepsilon M_y(k(y)).$$

Поскольку $k(y) \not\equiv 0$ и $k(y) \geqslant 0$, мы имеем $M_y(k(y)) > 0$. Поэтому

$$|f(x) - M_y(k_0(y)f(y^{-1}x))| \leqslant \varepsilon, \text{ где } k_0(x) = k(x)/M_x(k(x)). \tag{5}$$

Вследствие инвариантности $M_y(g(y^{-1})) = M_y(g(y)) = M_y(g(ay)) = M_y(g(ya))$ среднего значения из (5) вытекает оценка

$$|f(x) - M_y(k_0(xy^{-1})f(y))| \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех } x \in G. \tag{6}$$

Предложение 1. Обозначим через $C(G)$ совокупность всех равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций $h(g)$, заданных на группе G. Множество $C(G)$ с нормой $\|h\|_0 = \sup\limits_{g \in G}|h(g)|$ образует B-пространство. При любых b, $h \in C(G)$ функция

$$(b \times h)(x) = M_y(b(xy^{-1})h(y)) \tag{7}$$

тоже принадлежит пространству $C(G)$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{dis}(x, z) = \operatorname{dis}(axc, azc)$ и функция $b(g)$ равномерно непрерывна, для любого $\delta > 0$ можно указать такое $\eta = \eta(\delta) > 0$, что

$$\sup_y |b(xy^{-1}) - b(x'y^{-1})| \leqslant \delta$$

при всех x, x', удовлетворяющих условию $\operatorname{dis}(x, x') \leqslant \eta$.

Поэтому, как и при выводе неравенства Шварца, мы приходим к неравенству

$$|M_y(b(xy^{-1})h(y)) - M_y(b(x'y^{-1})h(y))|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_y((b(xy^{-1}) - b(x'y^{-1}))^2) \cdot M_y(|h(y)|^2) \leqslant \delta^2 M_y(|h(y)|^2), \tag{8}$$

справедливому при всех x, x', для которых $\operatorname{dis}(x, x') \leqslant \eta$. Отсюда и вытекает справедливость предложения 1.

Предложение 2. Множество $C(G)$ с обычными операциями сложения функций и умножения функций на комплексные числа и скалярным произведением

$$(b, h) = (b \times h^*)(e) = M_y(b(y^{-1})\overline{h(y^{-1})}) = M_y(b(y)\overline{h(y)}), \tag{9}$$

где $h^*(y) = \overline{h(y^{-1})}$, образует предгильбертово пространство. Это предгильбертово пространство мы обозначим через $\hat{C}(G)$.

Доказательство. Это утверждение доказывается очевидным образом.

Предложение 3. Обозначим через $\tilde{C}(G)$ пополнение предгильбертова пространства $\hat{C}(G)$. Норма гильбертова пространства $\tilde{C}(G)$ определяется как $\|h\| = (h, h)^{1/2}$. Линейное отображение T пространства $\hat{C}(G)$ в себя

$$(Th)(x) = (k_0 \times h)(x), \qquad x \in G, \tag{10}$$

непрерывно в пространстве $\hat{C}(G)$ и может быть продолжено до вполне непрерывного линейного оператора $\tilde{T}$, отображающего гильбертово пространство $\tilde{C}(G)$ в себя.

Доказательство. Мы имеем $M_y(1) = 1$, поэтому

$$\|h\| = (h, h)^{1/2} = M_y(h(y)\overline{h(y)})^{1/2} \leqslant \sup_y |h(y)| = \|h\|_0. \tag{11}$$

Непрерывность оператора T в пространстве $\hat{C}(G)$ вытекает из неравенства Шварца для функции (7), и, так как множество $\hat{C}(G)$ плотно в гильбертовом пространстве $\tilde{C}(G)$, можно расширить T до ограниченного линейного оператора $\tilde{T}$ в $\tilde{C}(G)$. Из (8) следует, что оператор T, отображающий $\hat{C}(G)$ в $\hat{C}(G)$, вполне непрерывен — это легко доказывается с помощью теоремы Асколи — Арцела. Таким образом, учитывая (11), мы устанавливаем, что $\tilde{T}$ — это вполне непрерывный оператор, отображающий $\hat{C}(G)$ в $\hat{C}(G)$.

Так как множество $\hat{C}(G)$ плотно в пространстве $\tilde{C}(G)$, продолженный оператор $\tilde{T}$ вполне непрерывен и отображает $\tilde{C}(G)$ в себя.

Теперь мы можем перейти к изложению *теории Петера — Вейля — Неймана*, касающейся представления почти-периодических функций.

Из свойства $k_0(xy^{-1}) = k_0(yx^{-1})$ видно, что вполне непрерывный оператор $\tilde{T}$ является самосопряженным в гильбертовом пространстве $\tilde{C}(G)$. Согласно теореме Гильберта — Шмидта предыдущего параграфа,

$$\tilde{T}h = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m P_{\lambda_m} h \text{ равномерно по } h \text{ при } \|h\| \leqslant 1, \tag{12}$$

где $\{\lambda_m\}$ — совокупность всех отличных от нуля собственных значений оператора $\tilde{T}$, а P_{λ_m} — оператор проектирования на собственное подпространство оператора $\tilde{T}$, соответствующее собственному значению λ_m.

Функция $f(g)$, определенная в начале этого параграфа, принадлежит $C(G)$, поэтому $\tilde{T}f = Tf \in C(G)$. Собственные подпространства $R(P_{\lambda_m}) = P_{\lambda_m} \cdot \tilde{C}(G)$ конечномерны, следовательно, для каждого собственного значения λ_m существует конечная система $\{h_{m_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n_m$, элементов пространства $\tilde{C}(G)$, таких, что всякий элемент $h \in R(P_{\lambda_m}) = P_{\lambda_m}\tilde{C}(G)$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов h_{n_j} $(j = 1, \ldots, n_m)$. Запишем это разложение в виде

$$P_{\lambda_m} h = \sum_{j=1}^{n_m} c_j h_{m_j}, \quad \text{где } c_j \text{ — комплексные числа.} \tag{13}$$

Тогда $\tilde{T}h_{m_j} = \lambda_m h_{m_j}$, так как $h_{m_j} \in R(P_{\lambda_m})$. Поэтому, применяя неравенство (8) к оператору T, определяемому формулой (10), мы видим, что элемент $h_{m_j} = \lambda_m^{-1}(\tilde{T}h_{m_j})$ должен принадлежать $C(G)$. Отсюда, учитывая (13), мы заключаем, что для каждого собственного значения λ_m оператора $\tilde{T}$ собственное подпространство $R(P_{\lambda_m}) = P_{\lambda_m} \cdot \tilde{C}(G)$ натянуто на элементы $h_{m_j} \in C(G)$.

Следовательно, согласно (12),

$$(Tf)(x) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m f_m(x) \text{ в сильной топологии пространства } \tilde{C}(G), \text{ где } f_m = P_{\lambda_m} \cdot f \in C(G) \text{ при каждом } m.$$

Используя теперь для оператора T, заданного выражением (10), неравенство (8), мы видим, что

$$(T^2 f)(x) = \lim_{n\to\infty} M_y\left(k_0(xy^{-1}) \sum_{m=1}^{n} \lambda_m f_m(y)\right) \text{ равномерно по } x. \tag{14}$$

С другой стороны, поскольку $M_y(k_0(y)) = 1$, из (6) следует, что

$$|M_z(k_0(xz^{-1}) f(z)) - M_z(k_0(xz^{-1}) M_y(k_0(zy^{-1}) f(y))| \leqslant \varepsilon.$$

Объединяя последнее неравенство с условием (6), получаем

$$|f(x) - M_z(k_0(xz^{-1}) M_y(k_0(zy^{-1}) f(y)))| \leqslant 2\varepsilon, \tag{15}$$

т. е. $|f(x) - (T^2 f)(x)| \leqslant 2\varepsilon$.

Вспоминая теперь, что $TR(P_{\lambda_m}) \subseteq R(P_{\lambda_m})$, мы можем сформулировать полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Функция $f(x)$ может быть равномерно аппроксимирована на множестве G линейными комбинациями собственных функций оператора $\tilde{T}$, соответствующих отличным от нуля собственным значениям.

Выберем теперь некоторое фиксированное собственное значение $\lambda \neq 0$ оператора $\tilde{T}$ и обозначим элементы базиса $\{h_j\} \subseteq C(G)$ соответствующего собственного подпространства $P_\lambda \cdot \tilde{C}(G)$ через $e_1(x)$,

$e_2(x), \ldots, e_k(x)$. Тогда вследствие инвариантности среднего значения мы для всякого элемента $a \in G$ получаем соотношение

$$M_y(k_0(xy^{-1})e_j(ya)) = M_y(k_0(xa \cdot a^{-1}y^{-1})e_j(ya)) = \\ = M_z(k_0(xa \cdot z^{-1})e_j(z)) = (Te_j)(xa) = \lambda e_j(xa).$$

Левая часть представляет собой результат применения оператора T к функции $e_j(ya)$ переменного y, поэтому при любом заданном $a \in G$ функция $e_j(xa)$ переменной x должна единственным образом выражаться в виде линейной комбинации функций $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_k(x)$. Таким образом,

$$e_j(xa) = \sum_{l=1}^{k} d_{jl}(a) e_l(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{16}$$

или в векторных обозначениях

$$e(xa) = D(a) e(x). \tag{16'}$$

Из равенств $e(x \cdot ab) = D(ab) e(x)$, $e(xa \cdot b) = D(b) e(xa) = D(b) D(a) e(x)$ мы, учитывая линейную независимость элементов $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_k(x)$, заключаем, что

$$D(ab) = D(b) D(a) \text{ и } D(e) \text{ — единичная матрица порядка } k. \tag{17}$$

Применяя процесс ортогонализации, можно считать, что $\{e_j(x)\}$ — ортонормированная система в $\tilde{C}(G)$. Тогда из (16) следует, что

$$M_x(e_j(xa) e_l^*(x)) = d_{jl}(a), \tag{18}$$

и поэтому элементы $d_{jl}(a)$ матрицы $D(a)$ принадлежат $C(G)$. Ввиду инвариантности среднего значения имеем

$$M_y(e_j(ya) \overline{e_l(ya)}) = M_y(e_j(y) \overline{e_l(y)}) = \delta_{lj}.$$

Следовательно, матрица $D(a)$ определяет линейное преобразование ортонормированной системы $\{e_j(x)\}$ в ортонормированную систему $\{e_j(xa)\}$. Поэтому матрица $D(a)$ должна быть унитарной. Матрица $D(a)'$, транспонированная к $D(a)$, тоже унитарна и

$$D(ab)' = D(a)' D(b)', \quad D(e)' \text{ — единичная матрица порядка } k. \tag{17'}$$

Таким образом, матрицы $D(a)'$ дают *унитарное матричное представление группы* G, при котором матричные элементы представляют собой непрерывные функции от a. Полагая $x = e$ в (16), мы замечаем, что каждый элемент $e_j(a)$ является линейной комбинацией матричных элементов представления $D(a)'$, Таким образом, доказана следующая

Теорема 2 (Петер — Вейль — Нейман). Рассмотрим вполне ограниченную топологическую группу G, метризованную с помощью функции расстояния, удовлетворяющей условию $\operatorname{dis}(x, y) = \operatorname{dis}(axb, ayb)$. Пусть $f(g)$ — комплексная ограниченная равномерно непрерывная функция, заданная на группе G. Тогда функцию $f(g)$ можно аппроксимировать равномерно на группе G линейными комбинациями матричных элементов унитарного равномерно непрерывного матричного представления $D(g)'$ группы G.

Вспоминая теорему Вейля из гл. VIII, § 5, мы получаем такое

Следствие. Пусть G — абстрактная группа и $f(g)$ — почти-периодическая функция на G. Функция $f(g)$ может быть равномерно аппроксимирована на группе G линейными комбинациями матричных элементов унитарного матричного представления $D(g)'$ группы G.

Замечание 1. Обозначим через d *порядок* матрицы $D(g)'$ унитарного представления группы G. Каждая матрица вида $D(g)'$ определяет линейное отображение некоторого фиксированного d-мерного гильбертова пространства X_d на себя. Представление $D(g)'$ называется *неприводимым*, если не существует отличного от $\{0\}$ собственного линейного подпространства пространства X_d, инвариантного относительно отображений $D(g)', g \in G$. Если же в X_d существует собственное линейное подпространство $X_{d,1} \neq \{0\}$, инвариантное по отношению ко всем отображениям $D(g)'$, $g \in G$, то представление $D(g)'$ называется *приводимым*. В этом случае ортогональное дополнение $X_{d,1}^{\perp}$ подпространства $X_{d,1}$ в X_d тоже инвариантно относительно всех $D(g)'$, так как матрицы $D(g)'$, $g \in G$, унитарны. Если за базис пространства X_d принять ортонормированную систему, составленную из ортонормированных базисов подпространств $X_{d,1}$ и $X_{d,1}^{\perp}$, то представление $D(g)'$ преобразуется к виду

$$U D(g)' U^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g)' & 0 \\ 0 & D_2(g)' \end{pmatrix},$$

где U — фиксированная унитарная матрица. Таким образом, *приводимое унитарное* представление $D(g)'$ распадается на унитарные представления $D_1(g)'$ и $D_2(g)'$ группы G, соответствующие гильбертовым пространствам $X_{d,1}$ и $X_{d,1}^{\perp}$, в прямую сумму которых разлагается пространство X_d, или, как говорят, приводимое представление $D(g)'$ разлагается в прямую *сумму* представлений $D_1(g)'$ и $D_2(g)'$. Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к некоторой фиксированной унитарной матрице U_d, такой, что представление $U_d D(g)' U_d^{-1}$ разлагается в сумму неприводимых представлений группы G. Следовательно, в формулировках теоремы 2 и следствия мы можем ввести требование, чтобы все матричные представления $D(g)'$ были неприводимыми,

Замечание 2. В частном случае, когда G — аддитивная группа вещественных чисел, неприводимое унитарное представление $D(g)'$ имеет вид

$$D(g)' = e^{i\alpha g}, \text{ где } \alpha \text{ — произвольное вещественное число, } i = \sqrt{-1}. \tag{19}$$

В самом деле, поскольку унитарные матрицы $D(g)'$, $g \in G$, перестановочны, представление $D(g)'$ разлагается на одномерные унитарные представления $\chi(g)$, представляющие собой комплексные решения уравнения

$$\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2), \quad |\chi(g_1)| = 1 \quad (g_1, g_2 \in G), \quad \chi(0) = 1. \tag{20}$$

Непрерывные решения уравнения (20), как известно, имеют вид $\chi(g) = e^{i\alpha g}$. Следовательно, всякая непрерывная почти-периодическая функция $f(g)$, заданная на аддитивной группе G вещественных чисел, может быть равномерно на G аппроксимирована линейными комбинациями функций $e^{i\alpha g}$ с вещественными α. Этот факт составляет содержание основной теоремы *теории почти-периодических* (по Бору) функций. По первоначальному определению Бора [1] непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется *почти-периодической*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $p = p(\varepsilon)$, что всякий интервал вида $(t, t + p)$ содержит по крайней мере одно значение τ, такое, что

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Бохнер [4] показал, что непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ является почти-периодической по Бору тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: для всякой последовательности вещественных чисел $\{a_n\}$ система функций $\{f_{a_n}(x);\ f_{a_n}(x) = f(x + a_n)\}$ вполне ограничена в топологии равномерной сходимости в интервале $(-\infty, \infty)$. Это утверждение было обобщено фон Нейманом [4] на *почти-периодические функции на группе*. Результаты фон Неймана содержат как частный случай теорию Петера — Вейля [1] непрерывных представлений бикомпактных групп Ли. Результат Бора может быть получен непосредственно из приведенных здесь и ранее результатов, так как если $|s - t| \to 0$, то $[\sup\limits_{a,b} |f(asb) - f(atb)|] \to 0$.

11. Теорема двойственности для некоммутативных бикомпактных групп

Пусть G — *бикомпактная (топологическая) группа.* Это означает, что группа G является одновременно бикомпактным топологическим пространством, причем отображение

$$(x, y) \to xy^{-1}$$