Замечание 2. В частном случае, когда G — аддитивная группа вещественных чисел, неприводимое унитарное представление $D(g)'$ имеет вид

$$D(g)' = e^{i\alpha g}, \text{ где } \alpha \text{ — произвольное вещественное число, } i = \sqrt{-1}. \tag{19}$$

В самом деле, поскольку унитарные матрицы $D(g)'$, $g \in G$, перестановочны, представление $D(g)'$ разлагается на одномерные унитарные представления $\chi(g)$, представляющие собой комплексные решения уравнения

$$\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2), \quad |\chi(g_1)| = 1 \quad (g_1, g_2 \in G), \quad \chi(0) = 1. \tag{20}$$

Непрерывные решения уравнения (20), как известно, имеют вид $\chi(g) = e^{i\alpha g}$. Следовательно, всякая непрерывная почти-периодическая функция $f(g)$, заданная на аддитивной группе G вещественных чисел, может быть равномерно на G аппроксимирована линейными комбинациями функций $e^{i\alpha g}$ с вещественными α. Этот факт составляет содержание основной теоремы *теории почти-периодических* (по Бору) функций. По первоначальному определению Бора [1] непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется *почти-периодической*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $p = p(\varepsilon)$, что всякий интервал вида $(t, t+p)$ содержит по крайней мере одно значение τ, такое, что

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Бохнер [4] показал, что непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ является почти-периодической по Бору тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: для всякой последовательности вещественных чисел $\{a_n\}$ система функций $\{f_{a_n}(x);\ f_{a_n}(x) = f(x + a_n)\}$ вполне ограничена в топологии равномерной сходимости в интервале $(-\infty, \infty)$. Это утверждение было обобщено фон Нейманом [4] на *почти-периодические функции на группе*. Результаты фон Неймана содержат как частный случай теорию Петера — Вейля [1] непрерывных представлений бикомпактных групп Ли. Результат Бора может быть получен непосредственно из приведенных здесь и ранее результатов, так как если $|s - t| \to 0$, то $[\sup_{a, b} |f(asb) - f(atb)|] \to 0$.

11. Теорема двойственности для некоммутативных бикомпактных групп

Пусть G — *бикомпактная* (*топологическая*) *группа.* Это означает, что группа G является одновременно бикомпактным топологическим пространством, причем отображение

$$(x, y) \to xy^{-1}$$

топологического произведения $G \times G$ на пространство G непрерывно.

Предложение 1. Всякая непрерывная комплексная функция $f(g)$, определенная на бикомпактной группе G, *равномерно непрерывна* в следующем смысле:

$$\text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ существует такая окрестность } U(e) \text{ единичного элемента } e \text{ группы } G, \text{ что } |f(x)-f(y)| < \varepsilon \text{ при всех } x, y, \text{ для которых } xy^{-1} \in U(e) \text{ или } x^{-1}y \in U(e). \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $a \in G$, для любого $\varepsilon > 0$ и всякого элемента $a \in G$ найдется такая окрестность V_a точки a, что для всех $x \in V_a$ выполняется неравенство $|f(x)-f(a)| < \varepsilon/2$. Рассмотрим окрестность U_a элемента e вида $U_a = V_a a^{-1} = \{va^{-1};\ v \in V_a\}$. Очевидно, что если $xa^{-1} \in U_a$, то $|f(x)-f(a)| < \varepsilon/2$. Обозначим через W_a такую окрестность элемента e, что $W_a^2 \subseteq U_a$, где $W_a^2 = \{w_1w_2;\ w_i \in W_a\ (i = 1, 2)\}$. Ясно, что система всех открытых множеств вида $W_a \cdot a$, где a — произвольный элемент группы G, покрывает все пространство G. В силу бикомпактности G существует конечное множество $\{a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, такое, что система открытых множеств $W_{a_i} \cdot a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ покрывает G. Обозначим через $U(e)$ пересечение всех открытых множеств системы $\{W_{a_i}\}$. Множество $U(e)$ является, очевидно, окрестностью элемента e. Покажем, что если $xy^{-1} \in U(e)$, то $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Действительно, поскольку система множеств $W_{a_i} \cdot a_i$ покрывает G, найдется такой номер k, что $ya_k^{-1} \in W_{a_k} \subseteq U_{a_k}$, и поэтому $|f(y)-f(a_k)| < \varepsilon/2$. Кроме того, $xa_k^{-1} = xy^{-1}ya_k^{-1} \in U(e)\,W_{a_k} \subseteq W_{a_k}^2 \subseteq U_{a_k}$, так что $|f(x)-f(a_k)| < \varepsilon/2$. Из последних двух неравенств мы заключаем, что $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Начиная с окрестности U_a элемента e, обладающей тем свойством, что если $x^{-1}a \in U_a$, то $|f(x)-f(a)| < \varepsilon/2$, мы получим такую окрестность $U(e)$ элемента e, что из условия $x^{-1}y \in U(e)$ будет следовать неравенство $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Взяв пересечение построенных выше двух окрестностей вида $U(e)$, мы и получим окрестность, существование которой утверждается в формулировке предложения 1.

Следствие. Всякая непрерывная комплексная функция $f(x)$, заданная на бикомпактной группе G, почти-периодична на G.

Доказательство. Пусть $U(e)$ — окрестность элемента e, фигурирующая в предложении 1. При любом $a \in G$ множество $U(e)\,a$ представляет собой окрестность элемента a. Система открытых множеств $\{U(e)\,a;\ a \in G\}$ покрывает бикомпактное пространство G, поэтому некоторая конечная система $\{U(e)\,a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ тоже покрывает G. Значит, для всякого $a \in G$ найдется некоторый элемент вида

a_k с номером $k \leqslant n$, такой, что $aa_k^{-1} \in U(e)$. Но так как $(ax)(a_k x)^{-1} = aa_k^{-1}$, отсюда следует, что $\sup\limits_x |f(ax) - f(a_k x)| < \varepsilon$. Аналогично строится конечная система элементов $\{b_j;\ j = 1, 2, \ldots, m\}$, такая, что для любого элемента $b \in G$ существует элемент вида b_j с номером $j \leqslant m$, удовлетворяющий неравенству

$$\sup_{i, x} |f(a_i x b) - f(a_i x b_j)| < \varepsilon.$$

Поэтому для любой пары элементов $a, b \in G$ мы можем найти такие a_k и $b_j (k \leqslant n,\ j \leqslant m)$, что

$$\sup_x |f(axb) - f(a_k x b_j)| < 2\varepsilon.$$

Это показывает, что множество функций $\{f_{a, b}(x);\ f_{a, b}(x) = f(axb),\ a, b \in G\}$ вполне ограничено по норме $\|h\| = \sup\limits_x |h(x)|$. Следовательно, непрерывная функция $f(x)$, заданная на группе G, почти-периодична.

Теперь можно обобщить результаты Петера — Вейля — Неймана, изложенные в предыдущем параграфе, распространив их на непрерывные комплексные функции $f(x)$, заданные на бикомпактной группе G. Для такой функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ определим множество

$$V = \left\{ y \in G;\quad \sup_x |f(x) - f(y^{-1}x)| < \varepsilon \right\}.$$

Множество V содержит элемент e и ввиду непрерывности функции f является открытым. Пространство G нормально, поэтому, согласно теореме Урысона, существует такая определенная на G непрерывная вещественная функция $k_1(x)$, что

$$0 \leqslant k_1(x) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in G,\ k_1(e) = 1,\ k_1(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in V^C.$$

Тогда непрерывная функция

$$k(x) = 2^{-1}\left(k_1(x) + k_1(x^{-1})\right) \tag{2}$$

удовлетворяет условию $k(x^{-1}) = k(x)$ и

$$0 \leqslant k(x) \leqslant 1 \text{ при } x \in G,\ k(e) = 1,$$

$$k(x) = 0 \text{ для всех } x \in U^C, \text{ где } U = V \cup V^{-1}.$$

Поэтому если обозначить B-пространство всех непрерывных комплексных функций $h(x)$, определенных на группе G, с нормой $\|h\| = \sup\limits_{x \in G} |h(x)|$ через $C(G)$, то можно определить линейный оператор T, отображающий пространство $\widehat{C}(G)$ в себя, полагая

$$(Th)(x) = (k_0 \times h)(x), \qquad x \in G. \tag{3}$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе,

$$k_0(x) = k(x)/M_x(k(x)) \tag{4}$$

и $\widehat{C}(G)$ — предгильбертово пространство, которое получается из $C(G)$, если ввести скалярное произведение

$$(b, h) = M_y(b(y)\overline{h(y)}) = (b \times h^*)(e), \quad h^*(y) = \overline{h(y^{-1})}. \tag{5}$$

Отсюда, как и в предыдущем параграфе, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Всякая непрерывная комплексная функция $f(g)$, заданная на бикомпактной группе G, почти-периодична и может быть равномерно аппроксимирована на G линейными комбинациями матричных элементов непрерывных унитарных неприводимых матричных представлений группы G.

Два матричных представления $A_1(g)$ и $A_2(g)$ группы G мы назовем *эквивалентными*, если существует такая фиксированная невырожденная матрица B, что $B^{-1}A_1(g)B = A_2(g)$ для всех $g \in G$.

Предложение 2 (лемма Шура). Если представления $A_1(g)$ и $A_2(g)$ неприводимы и не эквивалентны, то не существует никакой матрицы B, кроме $B = 0$, для которой тождественно относительно $g \in G$ выполнялось бы условие

$$A_1(g)B = BA_2(g). \tag{6}$$

Здесь подразумевается, что B — прямоугольная матрица, имеющая n_1 строк и n_2 столбцов, где n_1, n_2 — соответственно порядки матриц $A_1(g)$ и $A_2(g)$.

Доказательство. Обозначим через X_1 и X_2 линейные пространства, в которых действуют соответственно линейные преобразования $A_1(g)$ и $A_2(g)$. Матрицу B в (6) можно рассматривать как матрицу линейного отображения $x_2 \to x_1 = Bx_2$ пространства X_2 в X_1. Линейное подпространство пространства X_1, состоящее из векторов вида $x_1 = Bx_2$, *инвариантно* по отношению к преобразованию $A_1(g)$, так как $A_1(g)x_1 = Bx_2'$, где $x_2' = A_2(g)x_2 \in X_2$. Из неприводимости представления $A_1(g)$ мы заключаем, что либо $Bx_2 = 0$ для всех $x_2 \in X_2$, т. е. $B = 0$, либо $X_1 = BX_2$. С другой стороны, множество векторов x_2 пространства X_2, таких, что $Bx_2 = 0$, инвариантно по отношению к преобразованию $A_2(g)$, так как для таких элементов $BA_2(g)x_2 = A_1(g)Bx_2 = 0$. Представление $A_2(g)$ также неприводимо, поэтому либо $Bx_2 = 0$ для всех $x_2 \in X_2$ и тогда $B = 0$, либо $x_2 = 0$ — единственный вектор пространства X_2, такой, что $Bx_2 = 0$. В последнем случае различные векторы пространства X_2 переводятся линейным отображением B в различные векторы пространства X_1. Это означает, что при $B \neq 0$ отображение B-пространства X_2 на X_1 взаимно однозначно. Отсюда следует, что матрица B невырожденная ($n_1 = n_2$)

и представления $A_1(g)$ и $A_2(g)$ эквивалентны, а это противоречит сделанным предположениям.

Предложение 3 (соотношения ортогональности). Пусть $A_1(g) = (a^1_{ij}(g))$ и $A_2(g) = (a^2_{kl}(g))$ — непрерывные унитарные неприводимые матричные представления бикомпактной группы G. Тогда справедливы следующие *соотношения ортогональности*:

$$\begin{aligned} &M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^2_{kl}(g)}\right) = 0, \text{ если } A_1(g) \text{ и } A_2(g) \text{ не эквивалентны;} \\ &M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^1_{kl}(g)}\right) = n_1^{-1}\delta_{ik}\delta_{jl}, \text{ где } n_1 \text{ — порядок матрицы } A_1(g). \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим порядки матриц $A_1(g)$ и $A_2(g)$ соответственно через n_1 и n_2. Возьмем произвольную прямоугольную матрицу B из n_1 строк и n_2 столбцов и положим $A(g) = A_1(g)BA_2(g^{-1})$. Тогда матрица $A \equiv M_g(A(g))$ удовлетворяет условию $A_1(g)A = AA_2(g)$. В самом деле, в силу инвариантности среднего значения

$$\begin{aligned} A_1(y)AA_2(y^{-1}) &= M_g(A_1(y)A_1(g)BA_2(g^{-1})A_2(y^{-1})) = \\ &= M_g(A_1(yg)BA_2((yg)^{-1})) = A. \end{aligned}$$

По лемме Шура матрица A должна быть нулевой. Положим $B = (b_{jl})$, где все элементы, кроме одного, скажем b_{jl}, равны нулю. Тогда, согласно условию унитарности $A_2(g^{-1}) = \overline{A(g)'}$, мы получаем

$$M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^2_{kl}(g)}\right) = 0.$$

Далее мы, как и выше, получаем, что $A_1(g)A = AA_1(g)$, где $A = M_g(A_1(g)BA_1(g^{-1}))$. Обозначим через α любое из собственных значений матрицы A. Для матрицы $(A - \alpha I_{n_1})$, где I_{n_1} — единичная матрица порядка n_1, выполняется равенство

$$A_1(g)(A - \alpha I_{n_1}) = (A - \alpha I_{n_1})A_1(g).$$

Тогда по лемме Шура матрица $(A - \alpha I_{n_1})$ либо невырожденна, либо $(A - \alpha I_{n_1}) = 0$. Первая возможность исключена, так как α — собственное значение A, поэтому $A = \alpha I_{n_1}$. Взяв *след* tr (сумму диагональных элементов) обеих частей равенства

$$A = M_g(A_1(g)BA_1(g^{-1})),$$

находим, что

$$n_1\alpha = \operatorname{tr}(A) = M_g\left(\operatorname{tr}\left(A_1(g)BA_1(g)^{-1}\right)\right) = M_g(\operatorname{tr}(B)) = \operatorname{tr}(B).$$

Выбрав теперь матрицу $B = (b_{jl})$ так, чтобы $b_{jl} = 1$, а все прочие элементы равнялись нулю, мы из равенства

$$M_g\left(A_1(g)BA_1(g^{-1})\right) = n_1^{-1}\operatorname{tr}(B)I_{n_1}$$

видим, что

$$M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^1_{kl}(g)}\right) = n_1^{-1}\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Следствие. Существует множество $\mathfrak{U}$ взаимно неэквивалентных непрерывных унитарных неприводимых матричных представлений $U(g) = (u_{ij}(g))$ бикомпактной группы G, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(1°) для любой пары различных точек $g_1, g_2 \in G$ существует такая матрица $U(g) \in \mathfrak{U}$, что $U(g_1) \neq U(g_2)$;

(2°) если $U(g) \in \mathfrak{U}$, то *комплексно сопряженное представление* $\overline{U}(g)$ тоже входит в $\mathfrak{U}$;

(3°) если $U_1(g), U_2(g) \in \mathfrak{U}$, то произведение представлений $U_1(g) \times U_2(g)$, определенное ниже, разлагается в прямую сумму конечного числа представлений, принадлежащих $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Произведение представлений $U_1(g) \times U_2(g)$ определяется следующим образом. Обозначим через $(e_1^1, e_2^1, \ldots, e_n^1)$ и $(e_1^2, e_2^2, \ldots, e_m^2)$ ортонормированные базисы конечномерных гильбертовых пространств, в которых действуют соответственно операторы $U_1(g)$ и $U_2(g)$. Произведение этих гильбертовых пространств натянуто на *произведение базисов*, состоящее из nm векторов $e_i^1 \times e_j^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$). По отношению к этому базису произведение $U_1(g) \times U_2(g)$ представлений $U_1(g) = (u_{ij}^1(g))$ и $U_2(g) = (u_{kl}^2(g))$ определяется формулой

$$(U_1(g) \times U_2(g))(e_i^1 \times e_j^2) = \sum_{s,t} u_{si}^1(g) u_{tj}^2(g) (e_i^1 \times e_j^2).$$

Рассмотрим максимальную систему $\mathfrak{U}$ взаимно неэквивалентных непрерывных неприводимых унитарных представлений $U(g)$, удовлетворяющую условию (2°). Тогда из теоремы 1 легко выводится условие (1°). Условие (3°) тоже выполняется, так как произведение унитарных представлений унитарно и разлагается на неприводимые представления, принадлежащие семейству $\mathfrak{U}$.

Теперь мы можем перейти к формулировке *теоремы двойственности* (*теоремы Таннака*). Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность всех *полиномов Фурье*

$$x(g) = \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g),$$

т. е. конечных линейных комбинаций элементов $u_{ij}^{(\alpha)}(g)$, где $(u_{ij}^{(\alpha)}(g)) \in \mathfrak{U}$ и $\gamma_{ij}^{(\alpha)}$ — комплексные числа. Множество $\mathfrak{R}$ с операцией умножения элементов, определенной как умножение функций, представляет собой кольцо с единицей u (единицей служит функция $u(g) \equiv 1$ при $g \in B$); в этом кольце операции сложения элементов и умножения элементов на комплексные числа определяются как операции сложения функций и умножения функций на комплексные числа. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех *линейных гомоморфизмов* T кольца $\mathfrak{R}$ на поле комплексных чисел, удовлетворяющих условиям

$$Tu = 1, \quad T\overline{x} = \overline{Tx} \quad \text{(черта означает переход к комплексно сопряженным выражениям).} \tag{8}$$

Семейство $\mathfrak{T}$ не пусто, так как каждый элемент $g \in G$ порождает такой гомоморфизм T_g:

$$T_g x = x(g). \tag{9}$$

Из условия (1°) для $\mathfrak{U}$ видно, что

$$\text{если } g_1 \neq g_2, \text{ то } T_{g_1} \neq T_{g_2}. \tag{10}$$

Предложение 4. Множество $\mathfrak{T}$ можно рассматривать как группу, содержащую G в качестве подгруппы.

Доказательство. Определим произведение $T = T_1 \cdot T_2$ в $\mathfrak{T}$ следующим образом. Обозначим через

$$U^{(\alpha)}(g) = \left(u_{ij}^{(\alpha)}(g)\right) \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_\alpha)$$

представления, входящие в $\mathfrak{U}$. Для элементов $u_{ij}^{(\alpha)}(gh) = \sum\limits_k u_{ik}^{(\alpha)}(g)\, u_{kj}^{(\alpha)}(h)$ положим

$$Tu_{ij}^{(\alpha)} = \sum_k T_1 u_{ik}^{(\alpha)} \cdot T_2 u_{kj}^{(\alpha)}. \tag{11}$$

Из соотношений ортогональности (7) видно, что функции вида $u_{ij}^{(\alpha)}(g)$, где $\left(u_{ij}^{(\alpha)}(g)\right) \in \mathfrak{U}$, линейно независимы на G. Это позволяет линейно продолжить оператор T на все кольцо $\mathfrak{R}$. Нетрудно видеть, что продолжение T принадлежит $\mathfrak{T}$ и что множество $\mathfrak{T}$ с операцией умножения $T = T_1 \cdot T_2$ представляет собой группу. В этой группе $\mathfrak{T}$ единицей служит элемент T_e (e — единица группы G) и $T_g^{-1} = Tg^{-1}$. Группа G, как вытекает из (11) и (10), может быть изоморфно вложена в группу $\mathfrak{T}$ с помощью соответствия $g \longleftrightarrow T_g$.

На самом деле имеет место следующий более тонкий результат.

Теорема 2 (Таннака). Соответствие $g \longleftrightarrow T_g$ определяет изоморфизм групп G и $\mathfrak{T}$, т. е. $G = \mathfrak{T}$ в том смысле, что каждый элемент $T \in \mathfrak{T}$ равен некоторому отображению вида T_g:

$$Tx = x(g) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{R}. \tag{12}$$

Доказательство. Введем в группе $\mathfrak{T}$ *слабую топологию*, считая множества вида

$$\{T \in \mathfrak{T};\ |Tx_i - T_e x_i| < \varepsilon_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\} \tag{13}$$

окрестностями единичного элемента $T_e \in \mathfrak{T}$. Группа $\mathfrak{T}$ с такой топологией образует бикомпактное топологическое пространство. В самом деле, из условий (8) и (11) видно, что $\sum\limits_s \left| Tu_{si}^{(\alpha)}(g)\right|^2 = (T \cdot T)(1) = 1$, а это означает, что $\mathfrak{T}$ можно рассматривать как замкнутое подмножество топологического произведения

$$\prod_{x \in \mathfrak{R}} \left\{z;\ |z| \leqslant \sup_{T \in \mathfrak{T}} |Tx|\right\}$$

бикомпактных пространств, к которому можно применить теорему Тихонова. Нетрудно видеть, что изоморфное вложение $g \longleftrightarrow T_g$ является топологическим отображением, ибо взаимно однозначное непрерывное отображение одного бикомпактного пространства на другое представляет собой топологическое отображение. Таким образом, G можно рассматривать как замкнутую подгруппу бикомпактной группы $\mathfrak{T}$.

Каждый элемент $x(g) \in \mathfrak{R}$ порождает определенную на бикомпактной группе $\mathfrak{T}$ комплексную функцию $x(T) = T \cdot x$, которая непрерывна в слабой топологии пространства $\mathfrak{T}$, причем $x(T_g) = x(g)$. Множество всех таких непрерывных функций $x(T)$ образует кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ непрерывных комплексных функций, заданных на $\mathfrak{T}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $1 = u(T) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$;

2) для любой пары различных точек T_1, $T_2 \in \mathfrak{T}$ существует такая функция $x(T) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, что $x(T_1) \neq x(T_2)$;

3) если $x(T) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, то комплексно сопряженная функция $\overline{x}(T) = \overline{x(T)}$ также принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$.

Допустим теперь, что множество $\mathfrak{T} - G$ не пусто. Так как бикомпактное пространство $\mathfrak{T}$ нормально, мы можем воспользоваться теоремой Урысона и утверждать, что существуют точка $T_0 \in (\mathfrak{T} - G)$ и непрерывная функция $y(T)$, заданная на $\mathfrak{T}$, такие, что

$$y(T) \geqslant 0 \text{ при } T \in \mathfrak{T}, \quad y(g) = y(T_g) = 0 \text{ при } g \in G, \quad y(T_0) = 1. \tag{14}$$

Так как кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ удовлетворяет условиям 1) — 3), мы можем (см. введение) применить к нему теорему Стоуна — Вейерштрасса. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $x(g) = \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g) \in \mathfrak{R}$, такая, что $\left| y(T) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(T) \right| < \varepsilon$ при всех $T \in \mathfrak{T}$ и, в частности, $\left| y(g) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g) \right| < \varepsilon$ для всех значений $g \in G$. Мы можем, не ограничивая общности, допустить, что $u_{11}^{(\alpha_0)}(g) = u(g) = 1$ и что $u_{11}^{(\alpha_0)}$ входит в линейную комбинацию $x(g) = \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g)$ $\left(\text{можно считать, что } \gamma_{11}^{(\alpha_0)} = 0\right)$. Взяв от выражений $y(T) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(T)$ и $y(g) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g)$ средние значения (соответственно в бикомпактных группах $\mathfrak{T}$ и G) и используя соотношения ортогональности (7), мы получаем

$$\left| M_T(y(T)) - \gamma_{11}^{(\alpha_0)} \right| < \varepsilon, \quad \left| M_g(y(g)) - \gamma_{11}^{(\alpha_0)} \right| < \varepsilon. \tag{15}$$

Но неравенства (15) не могут одновременно выполняться, так как из условия (14) видно, что $M_g(y(g)) = 0$ и $M_T(y(T)) > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Приведенное выше доказательство теоремы Таннака взято из работы Иосида [14]. Первоначальное доказательство см. в работе Таннака [1]. Поскольку непрерывное неприводимое унитарное матричное представление бикомпактной абелевой группы G определяется непрерывной функцией $\chi(g)$ на G, удовлетворяющей условиям

$$\chi(g_1)\chi(g_2)=\chi(g_1, g_2) \quad \text{и} \quad |\chi(g)|=1,$$

из теоремы Таннака вытекает как частный случай известная теорема двойственности Понтрягина [1]. Дальнейшие ссылки см. в книге Наймарка [1].

Замечание 2. При определении средних значений непрерывных функций $f_k(g)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ (заданных на G) методом, данным в гл. VIII, § 5, следует заменить прежнюю функцию расстояния метрикой

$$\operatorname{dis}(g_1, g_2)=\sup_{\substack{g, h\in G;\\ k=1, 2, \ldots, m}} |f_k(gg_1h)-f_k(gg_2h)|.$$

12. Функции самосопряженных операторов

Пусть $H=\int \lambda\, dE(\lambda)$ — спектральное разложение самосопряженного оператора H, заданного в гильбертовом пространстве X. Для произвольной комплексной бэровской функции $f(\lambda)$ рассмотрим множество

$$D(f(H))\equiv\left\{x\in X;\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2<\infty\right\}, \tag{1}$$

где интеграл берется относительно меры Бэра m, определенной формулой $m((\lambda_1, \lambda_2])=\|E(\lambda_2)x\|^2-\|E(\lambda_1)x\|^2$. Как и в случае непрерывных функций $f(\lambda)$, рассмотренных в гл. XI, § 5, нетрудно убедиться в том, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, y), \quad x\in D(f(H)), \quad y\in X, \tag{2}$$

взятый относительно бэровской меры m, которая определяется соотношением $m((\lambda_1, \lambda_2])=(E(\lambda_2)x, y)-(E(\lambda_1)x, y)$, существует и конечен. Кроме того, выражение (2) как функция аргумента y представляет собой величину, комплексно сопряженную некоторому ограниченному линейному функционалу. Поэтому выражение (2) можно в соответствии с теоремой Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве (§ 6 гл. III) записать в виде скалярного произведения $(f(H)x, y)$, где $z=f(H)x\in X$. Это позволяет с помощью (1) и (2) определить линейный оператор $f(H)$, являющийся функцией самосопряженного оператора H:

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda). \tag{3}$$