ное матричное представление бикомпактной абелевой группы G определяется непрерывной функцией $\chi(g)$ на G, удовлетворяющей условиям

$$\chi(g_1)\chi(g_2) = \chi(g_1, g_2) \quad \text{и} \quad |\chi(g)| = 1,$$

из теоремы Таннака вытекает как частный случай известная теорема двойственности Понтрягина [1]. Дальнейшие ссылки см. в книге Наймарка [1].

Замечание 2. При определении средних значений непрерывных функций $f_k(g)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ (заданных на G) методом, данным в гл. VIII, § 5, следует заменить прежнюю функцию расстояния метрикой

$$\operatorname{dis}(g_1, g_2) = \sup_{\substack{g,\, h \in G;\\ k=1,\, 2,\, \ldots,\, m}} |f_k(gg_1h) - f_k(gg_2h)|.$$

12. Функции самосопряженных операторов

Пусть $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$ — спектральное разложение самосопряженного оператора H, заданного в гильбертовом пространстве X. Для произвольной комплексной бэровской функции $f(\lambda)$ рассмотрим множество

$$D(f(H)) \equiv \left\{ x \in X;\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty \right\}, \tag{1}$$

где интеграл берется относительно меры Бэра m, определенной формулой $m((\lambda_1, \lambda_2]) = \|E(\lambda_2)x\|^2 - \|E(\lambda_1)x\|^2$. Как и в случае непрерывных функций $f(\lambda)$, рассмотренных в гл. XI, § 5, нетрудно убедиться в том, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, y), \quad x \in D(f(H)), \quad y \in X, \tag{2}$$

взятый относительно бэровской меры m, которая определяется соотношением $m((\lambda_1, \lambda_2]) = (E(\lambda_2)x, y) - (E(\lambda_1)x, y)$, существует и конечен. Кроме того, выражение (2) как функция аргумента y представляет собой величину, комплексно сопряженную некоторому ограниченному линейному функционалу. Поэтому выражение (2) можно в соответствии с теоремой Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве (§ 6 гл. III) записать в виде скалярного произведения $(f(H)x, y)$, где $z = f(H)x \in X$. Это позволяет с помощью (1) и (2) определить линейный оператор $f(H)$, являющийся функцией самосопряженного оператора H:

$$f(H) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda). \tag{3}$$

Пример 1. Если H — ограниченный самосопряженный оператор и $f(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda^j$, то, как и в гл. XI, § 5,

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dE(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j H^j.$$

Пример 2. Если $f(\lambda)=(\lambda-i)(\lambda+i)^{-1}$, то оператор $f(H)$ совпадает с преобразованием Кэли U_H оператора H. В самом деле, в этом случае $D(f(H))=X$, так как $|f(\lambda)|=1$ при вещественных λ. Кроме того, $E(\lambda_1)E(\lambda_2)=E(\min(\lambda_1, \lambda_2))$, и поэтому если составить произведение ограниченного самосопряженного оператора $(H-iI)^{-1}=$ $=\int(\lambda-i)^{-1}\,dE(\lambda)$ на оператор $f(H)=\int f(\lambda)\,dE(\lambda)$, то получится оператор $(H+iI)^{-1}=\int(\lambda+i)^{-1}\,dE(\lambda)$. Следовательно, $f(H)=U_H$.

Пример 3. Как и в § 5 гл. XI, мы имеем

$$\|f(H)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,d\|E(\lambda)x\|^2 \quad \text{при всех} \quad x\in D(f(H)). \tag{4}$$

Определение. Рассмотрим в гильбертовом пространстве X некоторый линейный оператор A, не обязательно ограниченный, и ограниченный линейный оператор B. Если

$$\text{для всякого } x\in D(A) \text{ мы имеем } Bx\in D(A) \text{ и } ABx=BAx, \tag{5}$$

т. е. если $AB\supseteq BA$, то мы будем писать $B\in(A)'$ и говорить, что оператор B *перестановочен* с A. Таким образом, через $(A)'$ обозначается совокупность всех ограниченных линейных операторов, перестановочных с A.

Теорема 1. Для всякой функции $f(H)$ самосопряженного оператора $H=\int\lambda\,dE(\lambda)$, определенного в гильбертовом пространстве X, справедливо соотношение

$$(f(H))'\supseteq(H)', \tag{6}$$

т. е. всякий ограниченный линейный оператор, перестановочный с H, перестановочен и с оператором $f(H)$. (Так как, согласно теореме 2 гл. XI, § 5, $E(\lambda)\in(H)'$, то мы видим, в частности, что всякий оператор $E(\lambda)$ перестановочен с $f(H)$.)

Доказательство. Пусть $S\in(H)'$. Покажем, что оператор S перестановочен со всяким оператором $E(\lambda)$. Для этого убедимся сначала в том, что оператор S перестановочен с преобразованием Кэли U_H оператора H. Возьмем произвольный элемент $x\in D(H)$; тогда, поскольку $S \in (H)'$,

$$S(H+iI)x = (H+iI)Sx, \quad (H-iI)Sx = S(H-iI)x.$$

Полагая $(H+iI)x = y$, мы из первого равенства заключаем, что

$$(H+iI)^{-1}Sy = S(H+iI)^{-1}y \quad \text{для всех} \quad y \in X = R(H+iI).$$

Поэтому

$$S(H-iI)(H+iI)^{-1} = (H-iI)(H+iI)^{-1}S,$$

т. е. $SU_H = U_H S$.

Поскольку оператор S перестановочен с U_H, он перестановочен и с любой его степенью $(U_H)^n = \int_0^{2\pi} e^{ni\theta}\,dF(\theta)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} e^{ni\theta} d(SF(\theta)x, y) = \left(S\int_0^{2\pi} e^{ni\theta}\,dF(\theta)x, y\right) = \int_0^{2\pi} e^{ni\theta} d(F(\theta)Sx, y).$$

Отсюда, как и при доказательстве единственности спектрального разложения унитарного оператора в § 4 гл. XI, мы находим, что $SF(\theta) = F(\theta)S$. Это показывает, что $SE(\lambda) = E(\lambda)S$, так как $E(-\operatorname{ctg}\theta) = F(\theta)$. Таким образом, для $x \in D(f(H))$

$$\left(S\int f(\lambda)\,dE(\lambda)x, y\right) = \int f(\lambda)\,d(SE(\lambda)x, y) = \int f(\lambda)\,d(E(\lambda)Sx, y),$$

т. е. $Sf(H) \subseteq f(H)S$.

Доказанная теорема допускает следующее обращение.

Теорема 2 (Нейман — Рисс — Мимура). Пусть самосопряженный оператор H определен в сепарабельном гильбертовом пространстве X. Рассмотрим в X замкнутый линейный оператор T, такой, что $D(T)^a = X$. Для того чтобы оператор T был равен некоторой функции $f(H)$ оператора H, где $f(\lambda)$ — всюду конечная бэровская функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$(T)' \supseteq (H)'. \tag{7}$$

Доказательство. Мы должны лишь доказать, что условие (7) является достаточным. Можно считать оператор H ограниченным, ибо в противном случае можно перейти к оператору $H_1 = \operatorname{arctg} H$. Так как $|\operatorname{arctg}\lambda| \leqslant \pi/2$, оператор H_1 является ограниченным и самосопряженным. По теореме 1 оператор $H = \operatorname{tg} H_1$ перестановочен с любым оператором из семейства $(H_1)'$. Таким образом, по условию теоремы

$$(T)' \supseteq (H)' \supseteq (H_1)',$$

Если теорема будет доказана для оператора H_1, то

$$T = f_1(H_1) = f_1(\operatorname{arctg} H) = f_2(H), \quad \text{где} \quad f_2(\lambda) = f_1(\operatorname{arctg} \lambda).$$

Итак, будем считать, что H — ограниченный самосопряженный оператор.

Первый этап. Для всякого фиксированного элемента $x_0 \in D(T)$ мы можем найти такую бэровскую функцию $F(\lambda)$, что $Tx_0 = F(H)\,x_0$. Это построение проводится следующим образом. Обозначим через $M(x_0)$ наименьшее замкнутое линейное подпространство пространства X, натянутое на векторы $x_0, Hx_0, H^2x_0, \ldots, H^nx_0, \ldots$. Пусть L — оператор проектирования на подпространство $M(x_0)$. Тогда $(T)' \ni L$. В самом деле, $HM(x_0) \subseteq M(x_0)$, поэтому $HL = LHL$ и $LH = (HL)^* = (LHL)^* = LHL = HL$, т. е. $L \in (H)'$. Отсюда, согласно условиям теоремы, $(T)' \ni L$.

Следовательно, $Tx_0 = TLx_0 = LTx_0 \in M(x_0)$, и поэтому найдется такая последовательность $\{p_n(\lambda)\}$ полиномов $p_n(\lambda)$, что

$$Tx_0 = s\text{-}\lim_{n\to\infty} p_n(H)\,x_0. \tag{8}$$

Тогда, согласно формуле (4),

$$\| p_n(H)\,x_0 - p_m(H)\,x_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | p_n(\lambda) - p_m(\lambda)|^2\, d\,\|E(\lambda)\,x_0\|^2.$$

Теперь, как и при доказательстве полноты пространства $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$, мы приходим к выводу, что существует бэровская функция $F(\lambda)$ с интегрируемым квадратом относительно меры m, определяемой условием $m((\lambda_1, \lambda_2]) = \|E(\lambda_2)\,x_0\|^2 - \|E(\lambda_1)\,x_0\|^2$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} | F(\lambda) - p_n(\lambda)|^2\, d\,\|E(\lambda)\,x_0\|^2 = 0.$$

Следовательно, для оператора $F(H)$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|(F(H) - p_n(H))\,x_0\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} | F(\lambda) - p_n(\lambda)|^2\, d\,\|E(\lambda)\,x_0\|^2 = 0.$$

Это показывает, что $Tx_0 = F(H)\,x_0$. Функция $F(\lambda)$ конечна m-п. в. (имеется в виду мера m, определенная условием $m((\lambda_1, \lambda_2]) = \|E(\lambda_2)\,x_0\|^2 - \|E(\lambda_1)\,x_0\|^2$), поэтому, переопределяя $F(\lambda)$ в тех точках, где $|F(\lambda)| = \infty$, например полагая $F(\lambda) = 0$ в таких точках, мы приходим к всюду конечной бэровской функции $F(\lambda)$, удовлетворяющей поставленным ранее требованиям.

Второй этап. Поскольку пространство X сепарабельно и $D(T)^a = X$, можно выбрать счетную последовательность $\{g_n\} \subseteq D(T)$, сильно плотную в X. Положим

$$f_1 = g_1, \quad f_2 = g_2 - L_1 g_2, \ \ldots, \ f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_k g_n, \tag{9}$$

где L_k — оператор проектирования на замкнутое линейное подпространство $M(f_k)$.

Согласно первому этапу доказательства, $(T)' \ni L_k$, поэтому

$$L_k g_n \in D(T), \text{ откуда следует, что } f_n \in D(T) \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Покажем теперь, что

$$L_i L_k = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k \tag{11}$$

и

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} L_k. \tag{12}$$

Предположим, что равенство (11) доказано для $i, k < n$. Тогда при $i < n$

$$L_i f_n = L_1 g_n - L_i \left(\sum_{k=1}^{n-1} L_k g_n \right) = L_i g_n - L_i^2 g_n = L_i g_n - L_i g_n = 0,$$

$$L_i H^{k'} f_n = H^{k'} L_i f_n = 0 \qquad (k' = 1, 2, \ldots).$$

Последнее означает, что подпространства $M(f_n)$ и $M(f_i)$ взаимно ортогональны и, следовательно, $L_i L_n = L_n L_i = 0$. Таким образом, свойство (11) оказывается справедливым для всех значений $i \neq k$.

Введем теперь оператор $P = \sum_{k=1}^{\infty} L_k$ и убедимся в том, что $Pg_n = g_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Действительно, из равенств (9) следует, что

$$Pg_n = Pf_n + \sum_{k=1}^{n-1} PL_k g_n.$$

Кроме того, $Pf_n = f_n$, так как $f_n \in M(f_n)$. Поэтому, ввиду того что, как показывает условие (11), $PL_k = L_k$, мы получаем $Pg_n = g_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Но множество $\{g_n\}$ плотно в пространстве X; следовательно, $P = I$.

Третий этап. Выберем такую последовательность $\{c_n\}$ положительных чисел, что существуют пределы

$$s\text{-}\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} c_n f_n \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n T f_n.$$

Например, можно положить $c_n = 2^{-n} (\| f_n \| + \| T f_n \|)^{-1}$. Оператор T замкнут; следовательно,

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in D(T) \quad \text{и} \quad Tx_0 = y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T f_n. \tag{13}$$

Отсюда на основании результатов, установленных на первом этапе доказательства,

$$Tx_0 = F(H)\,x_0. \tag{14}$$

Пусть $B \in (H)'$ — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда по предположению $B \in (T)'$. Согласно теореме 1, оператор $F(H)$ перестановочен с B, поэтому

$$F(H)\,Bx_0 = BF(H)\,x_0 = BTx_0 = TBx_0. \tag{15}$$

Обозначим через $e_n(\lambda)$ характеристическую функцию множества $\{\lambda;\ |F(\lambda)| \leqslant n\}$ и положим

$$B = c_m^{-1}P_nH^kL_m, \quad \text{где} \quad P_n = e_n(H).$$

Докажем, что

$$TP_n = F(H)\,P_n. \tag{16}$$

Для этого заметим, что из условия (11) и включения $f_m \in M(f_m)$ вытекает равенство $L_mx_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_nL_mf_n = c_mf_m$. Следовательно, учитывая (15), мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} F(H)\,P_nH^kf_m = F(H)\,c_m^{-1}P_nH^kL_mx_0 = F(H)\,Bx_0 = TBx_0 = \\ = Tc_m^{-1}P_nH^kL_mx_0 = TP_nH^kf_m, \end{aligned}$$

откуда видно, что для элементов h подпространства, натянутого на векторы H^kf_m при фиксированном m, мы имеем

$$F(H)\,P_nh = TP_nh. \tag{16$'$}$$

Эти векторы h образуют в подпространстве $M(f_m)$ плотное множество, и если индекс m пробегает все положительные целые значения, то множество векторов h будет уже плотно во всем пространстве X. Следовательно, мы построили плотное в пространстве X множество векторов h, для которых выполняется равенство (16′).

По условию (4) операторы P_n ограничены. Из доказанной ниже теоремы 3 (операторное исчисление) следует, что оператор $F(H)\,P_n$ равен операторной функции $F_n(H)$, где

$$F_n(\lambda) = F(\lambda)\,e_n(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda) & \text{при} \quad |F(\lambda)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad |F(\lambda)| > n. \end{cases}$$

Таким образом, оператор $F_n(H) = F(H)\,P_n$ ограничен.

Возьмем теперь произвольный элемент $h^* \in X$ и выберем такую последовательность $\{h_j\}$ линейных комбинаций h_j векторов вида H^kf_m, что $h^* = s\text{-}\lim\limits_{j\to\infty} h_j$. Из доказанного ранее следует, что такой выбор последовательности $\{h\}$ осуществим. Так как каждый оператор вида

$F(H)P_n$ непрерывен, то

$$F(H)P_nh^* = s\text{-}\lim_{j\to\infty} F(H)P_nh_j.$$

Но $s\text{-}\lim\limits_{j\to\infty} P_nh_j = P_nh^*$, поэтому, принимая во внимание условие (16′), мы видим, что замкнутый оператор T удовлетворяет равенству (16).

Четвертый этап. Пусть $y \in D(F(H))$. Положим $y_n = P_ny$. Поскольку функция $F(\lambda)$ всюду конечна, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} P_n = I$. Следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} P_ny = y$. Таким образом, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} F(H)P_ny = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} F_n(H)y = F(H)y$ при всех $y \in D(F(H))$, и ввиду свойства (16) мы получаем, что $T \supseteq F(H)$.

Пусть теперь $y \in D(T)$ и $y_n = P_ny$. Тогда

$$Ty_n = TP_ny = F(H)P_ny \quad \text{(согласно (16))},$$

$$TP_ny = P_nTy \quad (\text{так как } P_n = e_n(H) \in (H)').$$

Из приводимой ниже теоремы 3 (операторное исчисление) следует что функция $F(H)$ оператора H представляет собой замкнутый оператор. Поэтому, полагая в написанных выше равенствах $n\to\infty$, мы получаем соотношение $F(H) \supseteq T$. Итак, доказано, что $T = F(H)$.

Операторное исчисление

Теорема 3. (1°) Пусть $\bar{f}(\lambda)$ — функция, комплексно сопряженная к функции $f(\lambda)$. Тогда $D(\bar{f}(H)) = D(f(H))$ и для любых элементов x, $y \in D(f(H)) = D(\bar{f}(H))$

$$(f(H)x, y) = (x, \bar{f}(H)y). \tag{17}$$

(2°) Если $x \in D(f(H))$, $y \in D(g(H))$, то

$$(f(H)x, g(H)y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\bar{g}(\lambda)\,d(E(\lambda)x, y). \tag{18}$$

(3°) Если $x \in D(f(H))$, то $(\alpha f)(H)x = \alpha f(H)x$. Если $x \in D(f(H)) \cap \cap D((g)(H))$, то

$$(f + g)(H)x = f(H)x + g(H)x. \tag{19}$$

(4°) Если $x \in D(f(H))$, то условие $f(H)x \in D(g(H))$ эквивалентно условию $x \in D((f\cdot g)(H))$, где $(f\cdot g)(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, и

$$g(H)f(H)x = (g\cdot f)(H)x. \tag{20}$$

(5°) Если функция $f(\lambda)$ всюду конечна, то $f(H)$ является нормальным оператором и

$$f(H)^* = \bar{f}(H). \tag{21}$$

В частности, если функция $f(\lambda)$ вещественна и всюду конечна, то оператор $f(H)$ самосопряженный.

Доказательство. (1°) Равенство $D(f(H)) = D(\bar{f}(H))$ очевидно; кроме того,

$$(f(H)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(x, E(\lambda)y) =$$

$$= \overline{(\bar{f}(H)y, x)} = (x, \bar{f}(H)y).$$

(2°) Как уже известно (теорема 1), оператор $E(\lambda)$ при всех λ перестановочен с $g(H)$. Поэтому

$$\begin{aligned}(f(H)x, g(H)y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, g(H)y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(x, E(\lambda)g(H)y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\overline{(g(H)E(\lambda)y, x)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d_\lambda\left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\mu)}\, d\overline{(E(\mu)E(\lambda)y, x)}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d_\lambda\left(\int_{-\infty}^{\lambda} \overline{g(\mu)}\, d\overline{(y, E(\mu)x)}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, d(E(\lambda)x, y).\end{aligned}$$

Утверждение (3°) очевидно.

(4°) Допустим, что элемент x удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty.$$

Тогда, поскольку $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu))$, из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)f(H)x\|^2 < \infty$$

ввиду перестановочности $E(\lambda)$ с $f(H)$ следует, что

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda) f(H) x\|^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\|f(H) E(\lambda) x\|^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mu)|^2 d\|E(\mu) E(\lambda) x\|^2 \right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} |f(\mu)|^2 d\|E(\mu) x\|^2 \right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda) x\|^2.$$

Эти вычисления могут быть проведены в обратном порядке, откуда видно, что при $x \in D(f(H))$ условия $f(H) x \in D(g(H))$ и $x \in D((f \cdot g)(H))$ эквивалентны и

$$(g(H) f(H) x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d(E(\lambda) f(H) x, y) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d(E(\mu) x, y) \right) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) f(\lambda) d(E(\lambda) x, y) = ((g \cdot f)(H) x, y).$$

(5°) Положим $h(\lambda) = |f(\lambda)| + \alpha$, $k(\lambda) = h(\lambda)^{-1}$, $g(\lambda) = f(\lambda) h(\lambda)^{-1}$, где α — произвольное целое положительное число. Обе функции $k(\lambda)$ и $g(\lambda)$ ограничены. Поэтому $D(k(H)) = D(g(H)) = X$. Но тогда из (4°) следует, что

$$f(H) = h(H) g(H) = g(H) h(H). \tag{22}$$

Из (1°) и равенства $D(k(H)) = X$ вытекает, что $k(H)^* = k(H)$, т. е. оператор $k(H)$ самосопряженный. Из (4°) видно, что $x = h(H) k(H) x$ для всех $x \in X$ и $x = k(H) h(H) x$ при $x \in D(h(H))$. Следовательно, $h(H) = k(H)^{-1}$. Отсюда на основании теоремы 1 гл. VII, § 3, мы заключаем, что оператор $h(H)$ самосопряженный. Поэтому область определения $D(f(H)) = D(h(H))$ плотна в пространстве X, что позволяет определить сопряженный оператор $f(H)^*$, Покажем, что $f(H)^* = \bar{f}(H)$. Обозначим через $\{y, y^*\}$ произвольную пару элементов $y, y^* \in X$, удовлетворяющих условию $(f(H)x, y) = (x, y^*)$ при всех $x \in D(f(H))$. Тогда, согласно (22) и равенству $g(H)^* = \bar{g}(H)$ (которое следует из (1°)), мы получаем

$$(f(H)x, y) = (g(H)h(H)x, y) = (h(H)x, \bar{g}(H)y).$$

Отсюда для элементов $x \in D(f(H)) = D(h(H))$ с учетом самосопряженности оператора $h(H)$ следует, что

$$\bar{g}(H)y \in D(h(H)) \quad \text{и} \quad h(H)\bar{g}(H)y = y^*.$$

Используя снова условие (22), мы находим, что $\bar{f}(H)y = y^*$, и поэтому $f(H)^* = \bar{f}(H)$. Значит, в силу (4°) оператор $f(H)$ нормальный, т. е. $f(H)^* f(H) = f(H) f(H)^*$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(\lambda)$ всюду конечна, то оператор $f(H)$ замкнут.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $f(H)^{**} = \bar{f}(H)^* = \bar{\bar{f}}(H) = f(H)$.

Историческое замечание. Теорема 2 первоначально была доказана фон Нейманом [7] для случая ограниченного самосопряженного оператора T (см. Рисс [5]). Общий случай произвольного замкнутого линейного оператора T был исследован Мимура [2]. Приведенное в этой книге изложение заимствовано из работ Мимура [2] и Надя [1].

13. Теорема Стоуна и теорема Бохнера

Теорема 1 (Стоун). Пусть $\{U_t; -\infty < t < \infty\}$ — произвольная однопараметрическая группа класса (C_0) унитарных операторов в гильбертовом пространстве X. Тогда

$$U_t = f_t(H), \quad \text{где} \quad f_t(\lambda) = \exp(it\lambda), \quad iH = A, \quad H^* = H,$$

$$A \text{ — инфинитезимальный производящий оператор группы } \{U_t\}. \qquad (1)$$

Обратно, для любого самосопряженного оператора H, заданного в гильбертовом пространстве X, семейство операторов

$$\{U_t = f_t(H), \quad f_t(\lambda) = \exp(it\lambda), \quad -\infty < t < \infty\}$$

образует однопараметрическую группу класса (C_0) унитарных операторов U_t.

Доказательство. По доказанной ранее теореме о представлении полугрупп

$$U_t x = s\text{-}\lim_{n \to \infty} \exp\left(tiH\left(I - n^{-1}iH\right)^{-1}\right)x,$$