Покажем, что $f(H)^* = \bar{f}(H)$. Обозначим через $\{y, y^*\}$ произвольную пару элементов $y, y^* \in X$, удовлетворяющих условию $(f(H)x, y) = (x, y^*)$ при всех $x \in D(f(H))$. Тогда, согласно (22) и равенству $g(H)^* = \bar{g}(H)$ (которое следует из (1°)), мы получаем

$$(f(H)x, y) = (g(H)h(H)x, y) = (h(H)x, \bar{g}(H)y).$$

Отсюда для элементов $x \in D(f(H)) = D(h(H))$ с учетом самосопряженности оператора $h(H)$ следует, что

$$\bar{g}(H)y \in D(h(H)) \quad \text{и} \quad h(H)\bar{g}(H)y = y^*.$$

Используя снова условие (22), мы находим, что $\bar{f}(H)y = y^*$, и поэтому $f(H)^* = \bar{f}(H)$. Значит, в силу (4°) оператор $f(H)$ нормальный, т. е. $f(H)^* f(H) = f(H) f(H)^*$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(\lambda)$ всюду конечна, то оператор $f(H)$ замкнут.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $f(H)^{**} = \bar{f}(H)^* = \bar{\bar{f}}(H) = f(H)$.

Историческое замечание. Теорема 2 первоначально была доказана фон Нейманом [7] для случая ограниченного самосопряженного оператора T (см. Рисс [5]). Общий случай произвольного замкнутого линейного оператора T был исследован Мимура [2]. Приведенное в этой книге изложение заимствовано из работ Мимура [2] и Надя [1].

13. Теорема Стоуна и теорема Бохнера

Теорема 1 (Стоун). Пусть $\{U_t; -\infty < t < \infty\}$ — произвольная однопараметрическая группа класса (C_0) унитарных операторов в гильбертовом пространстве X. Тогда

$$U_t = f_t(H), \quad \text{где} \quad f_t(\lambda) = \exp(it\lambda), \quad iH = A, \quad H^* = H,$$

$$A \text{ — инфинитезимальный производящий оператор группы } \{U_t\}. \tag{1}$$

Обратно, для любого самосопряженного оператора H, заданного в гильбертовом пространстве X, семейство операторов

$$\{U_t = f_t(H), \quad f_t(\lambda) = \exp(it\lambda), \quad -\infty < t < \infty\}$$

образует однопараметрическую группу класса (C_0) унитарных операторов U_t.

Доказательство. По доказанной ранее теореме о представлении полугрупп

$$U_t x = \underset{n \to \infty}{s\text{-}\lim} \exp\left(tiH\left(I - n^{-1}iH\right)^{-1}\right)x,$$

где оператор H определяется условием $iH = A$. Поскольку функция $g(t) = \exp\left(ti\lambda(1 - n^{-1}i\lambda)^{-1}\right)$ по абсолютной величине не превосходит $\exp((-nt\lambda^2)/(n^2+\lambda^2))$, для оператора $H = \int \lambda\, dE(\lambda) = i^{-1}A$ справедливо равенство

$$\exp\left(tiH(I - n^{-1}iH)^{-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ti\lambda}{1 - n^{-1}i\lambda}\right) dE(\lambda)$$

и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\exp\left(\frac{ti\lambda}{1 - n^{-1}i\lambda}\right) - \exp(ti\lambda)\right|^2 d\,\|E(\lambda)x\|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\exp\left(\frac{-t\lambda^2}{n - i\lambda}\right) - 1\right|^2 d\,\|E(\lambda)x\|^2 = 0.$$

Это доказывает, что

$$U_t = f_t(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\lambda)\, dE(\lambda).$$

Для доказательства обратного утверждения теоремы заметим, что по теореме 3 предыдущего параграфа

$$f_t(H)^* = f_{-t}(H) \quad \text{и} \quad f_t(H)\, f_s(H) = f_{t+s}(H), \qquad f_0(H) = I.$$

Кроме того, функция $f_t(H)$ сильно непрерывна в точке $t = 0$, так как

$$\|f_t(H)x - x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(it\lambda) - 1|^2 d\,\|E(\lambda)x\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Таким образом, операторы $U_t = f_t(H)$ образуют однопараметрическую группу унитарных операторов класса (C_0).

Замечание. Первоначальное доказательство этой теоремы см. у М. Стоуна [2]. Ср. с изложением фон Неймана [8]. Другое доказательство этой теоремы, предложенное Хопфом [1], опирается на следующую теорему Бохнера.

Теорема 2 (Бохнер). Для того чтобы непрерывную комплексную функцию $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, можно было представить в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dv(\lambda), \tag{2}$$

где $v(\lambda)$ — неубывающая непрерывная справа функция, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ была *положительно определенной* в следующем смысле:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds \geqslant 0 \tag{3}$$

для всякой непрерывной комплексной функции φ с бикомпактным носителем.

Доказательство теоремы 1, данное Хопфом, опирается на то, что функция $f(t)=(U_t x, x)$ удовлетворяет условию (3); это видно из неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (U_{t-s}x, x)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (U_t x, U_s x)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds =$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)U_t x\,dt, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)U_s x\,ds\right) \geqslant 0.$$

Вывод теоремы 2 из теоремы 1. Обозначим через $\mathfrak{F}$ совокупность всех комплексных функций $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, которые обращаются в нуль всюду, за исключением, быть может, конечного множества значений t; эти конечные множества могут быть различными для разных функций $x(t)$. Введем в множестве $\mathfrak{F}$ операции

$$\begin{gathered}(x+y)(t)=x(t)+y(t), \qquad (\alpha x)(t)=\alpha x(t),\\ (x, y)=\sum_{-\infty<t,\ s<\infty} f(t-s)x(t)\overline{y(s)} \text{ для любых } x, y \in \mathfrak{F}\text{[1]}.\end{gathered} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что при этом для множества $\mathfrak{F}$ выполняются все аксиомы предгильбертова пространства, за исключением требования $x=0$, если $(x, x)=0$. Условие $(x, x)\geqslant 0$ для всех $x\in\mathfrak{F}$ следует непосредственно из положительной определенности функции $f(t)$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{N}=\{x\in\mathfrak{F};\ (x, x)=0\}$. Факторпространство $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ с операциями $\bar{x}+\bar{y}=\overline{(x+y)}$, $\alpha\bar{x}=\overline{(\alpha x)}$ и скалярным произведением $(\bar{x}, \bar{y})=(x, y)$, где $\bar{x}$ — класс вычетов $\operatorname{mod}\mathfrak{N}$, содержащий $x\in\mathfrak{F}$, представляет собой предгильбертово пространство. Пусть $\hat{X}$ — его пополнение. Определим для элементов $x(t)\in\mathfrak{F}$ оператор сдвига U_τ:

$$(U_\tau x)(t)=x(t+\tau), \qquad x\in\mathfrak{F}. \tag{5}$$

---

[1] Запись $\sum\limits_{-\infty<t,\ s<\infty} f(t-s)x(t)\overline{y(s)}$ означает здесь суммирование по всем значениям t (их число конечно), при которых выражение $f(t-s)x(t)\bar{y}(s)$ отлично от нуля. — *Прим. перев.*

Операторы U_τ естественным образом распространяются на предгильбертово пространство $X = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$. Эти операторы U_τ удовлетворяют условиям

$$(U_\tau x, U_\tau y) = (x, y), \quad U_\tau U_\sigma = U_{\tau+\sigma} \quad \text{и} \quad U_0 = I, \tag{6}$$

поэтому U_τ можно расширить до унитарных операторов $\hat{U}_\tau$, заданных во всем гильбертовом пространстве $\hat{X}$, которые образуют однопараметрическую группу $\{\hat{U}_\tau; -\infty < \tau < \infty\}$ класса (C_0). Сильная непрерывность операторной функции $\hat{U}_t$ по переменной t вытекает из непрерывности функции $f(t)$.

Применяя к группе $\{\hat{U}_t\}$ теорему Стоуна, мы находим, что $\hat{U}_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE(\lambda)$. Выберем из множества $\mathfrak{F}$ функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = \tau, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq \tau, \end{cases}$$

где значение τ фиксировано. Из соотношений (4) и (5) следует, что $f(\tau) = (U_\tau x_0, x_0)$. Поэтому

$$f(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} d\, \| E(\lambda)\, \bar{x}_0 \|^2,$$

что и завершает доказательство теоремы Бохнера.

Замечание. Идея использования положительно определенной функции для построения предгильбертова пространства с операциями (4) была использована в работе Надя [3] для исследования ряда интересных задач, относящихся к гильбертовым пространствам.

14. Каноническая форма самосопряженного оператора с простым спектром

Пусть самосопряженный оператор $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$, заданный в гильбертовом пространстве X, обладает простым спектром (см. § 8 гл. XI). Тогда существует элемент $y \in X$, такой, что множество $\{(E(\beta) - E(\alpha))\, y;\ \alpha < \beta\}$ порождает линейное подпространство, плотное в X. Положим

$$\sigma(\lambda) = (E(\lambda)\, y, y). \tag{1}$$

Ясно, что $\sigma(\lambda)$ — монотонная невозрастающая ограниченная и непрерывная справа функция. Обозначим через $\sigma(B)$ меру Бэра, определенную на бэровских множествах пространства R^1, которая порождается функцией $\sigma((a, b]) = \sigma(b) - \sigma(a)$. Рассмотрим совокупность