Операторы $U_\tau$ естественным образом распространяются на предгильбертово пространство $X = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$. Эти операторы $U_\tau$ удовлетворяют условиям

$$(U_\tau x, U_\tau y) = (x, y), \quad U_\tau U_\sigma = U_{\tau+\sigma} \quad \text{и} \quad U_0 = I, \tag{6}$$

поэтому $U_\tau$ можно расширить до унитарных операторов $\hat{U}_\tau$, заданных во всем гильбертовом пространстве $\hat{X}$, которые образуют однопараметрическую группу $\{\hat{U}_\tau; -\infty < \tau < \infty\}$ класса $(C_0)$. Сильная непрерывность операторной функции $\hat{U}_t$ по переменной $t$ вытекает из непрерывности функции $f(t)$.

Применяя к группе $\{\hat{U}_t\}$ теорему Стоуна, мы находим, что $\hat{U}_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE(\lambda)$. Выберем из множества $\mathfrak{F}$ функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = \tau, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq \tau, \end{cases}$$

где значение $\tau$ фиксировано. Из соотношений (4) и (5) следует, что $f(\tau) = (U_\tau x_0, x_0)$. Поэтому

$$f(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} d\, \| E(\lambda)\, \bar{x}_0 \|^2,$$

что и завершает доказательство теоремы Бохнера.

**Замечание.** Идея использования положительно определенной функции для построения предгильбертова пространства с операциями (4) была использована в работе Надя [3] для исследования ряда интересных задач, относящихся к гильбертовым пространствам.

## *14. Каноническая форма самосопряженного оператора с простым спектром*

Пусть самосопряженный оператор $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$, заданный в гильбертовом пространстве $X$, обладает простым спектром (см. § 8 гл. XI). Тогда существует элемент $y \in X$, такой, что множество $\{(E(\beta) - E(\alpha))\, y;\ \alpha < \beta\}$ порождает линейное подпространство, плотное в $X$. Положим

$$\sigma(\lambda) = (E(\lambda)\, y, y). \tag{1}$$

Ясно, что $\sigma(\lambda)$ — монотонная невозрастающая ограниченная и непрерывная справа функция. Обозначим через $\sigma(B)$ меру Бэра, определенную на бэровских множествах пространства $R^1$, которая порождается функцией $\sigma((a, b]) = \sigma(b) - \sigma(a)$. Рассмотрим совокупность

$L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ всех комплексных измеримых по Бэру функций $f(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f\|_\sigma = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \sigma(d\lambda) \right)^{1/2} < \infty.$$

Если условиться считать совпадающими всякие две функции $f, g \in L^2_\sigma$, которые совпадают $\sigma$-п. в., и ввести в $L^2_\sigma$ скалярное произведение $(f, g)_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda)$, то множество $L^2_\sigma$ превратится в гильбертово пространство, для которого мы сохраним обозначение $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

**Теорема.** Поставим в соответствие каждой функции $f(\lambda) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ вектор $\hat{f}$ гильбертова пространства $X$, определенный равенством

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, y. \tag{2}$$

Соответствие $f(\lambda) \to \hat{f}$ является взаимно однозначным изометрическим отображением пространства $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ на $X$. Обозначим это отображение через $V$: $\hat{f} = Vf$. Тогда оператор $H_1 = V^{-1}HV$ в пространстве $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ есть не что иное, как оператор умножения на $\lambda$:

$$\begin{gathered} D(H_1) = D(V^{-1}HV) = \{f(\lambda);\ f(\lambda) \text{ и } \lambda f(\lambda) \in L^2_\sigma(\infty, \infty)\} \\ \text{и } (H_1 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \text{при всех} \quad f(\lambda) \in D(H_1). \end{gathered} \tag{3}$$

**Доказательство.** Так как $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu))$, мы имеем

$$\begin{aligned} (E(\lambda)y, \hat{f}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\mu)}\, d_\mu (E(\lambda)y, E(\mu)y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\mu)}\, d_\mu (E(\mu)E(\lambda)y, y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{f(\mu)}\, d(E(\mu)y, y) = \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{f(\mu)}\, \sigma(d\mu), \end{aligned}$$

и поэтому

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)y, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda) = (f, g)_\sigma. \tag{4}$$

Отсюда видно, что оператор $V$ отображает область $D(V)=L^2_\sigma(-\infty,\infty)$ на множество $\left\{\hat{f};\ \hat{f}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dE(\lambda)\,y,\ f\in L^2_\sigma(-\infty,\infty)\right\}$ взаимно однозначно, линейно и изометрично. Следовательно, область значений $R(V)$ является замкнутым подпространством пространства $X$. Но множество $R(V)$ состоит из элементов вида $\int\limits_{\alpha}^{\beta} dE(\lambda)\,y=$ $=(E(\beta)-E(\alpha))\,y$, $-\infty<\alpha<\beta<\infty$, и так как по предположению оператор $H$ обладает простым спектром, $R(V)=R(V)^a=X$. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Из равенства

$$E(\lambda)\hat{f}=E(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\,dE(\mu)\,y=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\,d_\mu(E(\lambda)E(\mu)\,y)=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} f(\mu)\,dE(\mu)\,y$$

на основании условия (4) выводится соотношение

$$(E(\lambda)\hat{f},\ \hat{g})=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} f(\mu)\overline{g(\mu)}\,\sigma(d\mu). \tag{5}$$

Таким образом, неравенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d(E(\lambda)\hat{f},\ \hat{f})<\infty$, эквивалентное условию $\hat{f}\in D(H)$, равносильно требованию $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2|f(\lambda)|^2\sigma(d\lambda)<\infty$. При выполнении последнего условия из соотношения (20) § 12 гл. XI вытекает формула

$$HVf=H\hat{f}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)\,\hat{f},$$

откуда ввиду условий (4) и (5)

$$(H_1 f,\ g)_\sigma=\left(V^{-1}HVf,\ g\right)_\sigma=(HV\cdot f,\ V\cdot g)=$$
$$=(H\cdot\hat{f},\ \hat{g})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,d(E(\lambda)\hat{f},\ \hat{g})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\,\sigma(d\lambda).$$

С другой стороны,

$$(H_1 f, g)_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (H_1 f)(\lambda) \overline{g(\lambda)} \sigma(d\lambda).$$

Поэтому

$$(H_1 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \qquad \sigma\text{-п. в.},$$

что и завершает доказательство.

**Замечание.** Существует тесная связь между самосопряженными операторами с простым спектром и так называемыми *матрицами Якоби*. См. по этому поводу М. Стоун [1], стр. 275. Каноническая форма самосопряженных операторов, спектр которых не обязательно является простым, рассматривалась фон Нейманом [9] [1]).

### *15. Индекс дефекта симметрического оператора. Обобщенное разложение единицы*

**Определение 1.** Обозначим через $U = U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ преобразование Кэли замкнутого симметрического оператора $H$, определенного в гильбертовом пространстве $X$. Рассмотрим подпространства $X_H^+ = D(U_H)^\perp$ и $X_H^- = R(U_H)^\perp$ и обозначим через $m = \dim(X_H^+)$ и $n = \dim(X_H^-)$ соответственно размерности $X_H^+$ и $X_H^-$. Пара чисел $(m, n)$ называется *индексом дефекта оператора* $H$. Для того чтобы симметрический оператор $H$ был самосопряженным, необходимо и достаточно (см. гл. VII, § 4), чтобы его индекс дефекта был равен $(0, 0)$.

**Предложение 1.** Индекс дефекта $(m, n)$ замкнутого симметрического оператора $H$ можно определить следующим образом: $m$ есть размерность линейного подпространства $\{x \in X;\ H^* x = ix\}$, $n$ — размерность линейного подпространства $\{x \in X;\ H^* x = -ix\}$.

**Доказательство.** Справедливость этого утверждения с очевидностью вытекает из теоремы 3 § 4 гл. VII.

**Пример 1.** Пусть $X = L^2(0, 1)$. Обозначим через $D$ совокупность всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(0, 1)$, таких, что $x(0) = x(1) = 0$ и $x'(t) \in L^2(0, 1)$. Тогда оператор $T_1 : T_1 x(t) = i^{-1} x'(t)$, заданный в области $D = D(T_1)$, имеет индекс дефекта $(1, 1)$.

**Доказательство.** Как было показано в примере 4 § 3 гл. VII, оператор $T_1^* = T_2$ определяется условием

$T_2 x(t) = i^{-1} x'(t)$ в области $D(T_2) = \{x(t) \in L^2(0, 1);$
функции $x(t)$ абсолютно непрерывны и $x'(t) \in L^2(0, 1)\}$.

---

[1]) См. также Ахиезер — Глазман [1]. — *Прим. перев.*