С другой стороны,

$$(H_1 f, g)_\sigma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (H_1 f)(\lambda) \overline{g(\lambda)} \sigma(d\lambda).$$

Поэтому

$$(H_1 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \qquad \sigma\text{-п. в.},$$

что и завершает доказательство.

Замечание. Существует тесная связь между самосопряженными операторами с простым спектром и так называемыми *матрицами Якоби*. См. по этому поводу М. Стоун [1], стр. 275. Каноническая форма самосопряженных операторов, спектр которых не обязательно является простым, рассматривалась фон Нейманом [9] [1]).

15. Индекс дефекта симметрического оператора. Обобщенное разложение единицы

Определение 1. Обозначим через $U = U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ преобразование Кэли замкнутого симметрического оператора H, определенного в гильбертовом пространстве X. Рассмотрим подпространства $X_H^+ = D(U_H)^\perp$ и $X_H^- = R(U_H)^\perp$ и обозначим через $m = \dim(X_H^+)$ и $n = \dim(X_H^-)$ соответственно размерности X_H^+ и X_H^-. Пара чисел (m, n) называется *индексом дефекта оператора* H. Для того чтобы симметрический оператор H был самосопряженным, необходимо и достаточно (см. гл. VII, § 4), чтобы его индекс дефекта был равен $(0, 0)$.

Предложение 1. Индекс дефекта (m, n) замкнутого симметрического оператора H можно определить следующим образом: m есть размерность линейного подпространства $\{x \in X;\ H^*x = ix\}$, n — размерность линейного подпространства $\{x \in X;\ H^*x = -ix\}$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения с очевидностью вытекает из теоремы 3 § 4 гл. VII.

Пример 1. Пусть $X = L^2(0, 1)$. Обозначим через D совокупность всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(0, 1)$, таких, что $x(0) = x(1) = 0$ и $x'(t) \in L^2(0, 1)$. Тогда оператор $T_1 : T_1 x(t) = i^{-1}x'(t)$, заданный в области $D = D(T_1)$, имеет индекс дефекта $(1, 1)$.

Доказательство. Как было показано в примере 4 § 3 гл. VII, оператор $T_1^* = T_2$ определяется условием

$$T_2 x(t) = i^{-1}x'(t) \quad \text{в области} \quad D(T_2) = \{x(t) \in L^2(0, 1);$$
$$\text{функции } x(t) \text{ абсолютно непрерывны и } x'(t) \in L^2(0, 1)\}.$$

---

[1]) См. также Ахиезер — Глазман [1]. — *Прим. перев.*

Следовательно, решение $y \in L^2(0, 1)$ уравнения $T_1^* y = T_2 y = iy$ определяет обобщенное решение дифференциального уравнения

$$y'(t) = -y(t) \qquad (y, y' \in L^2(0, 1)). \tag{1}$$

Функция $z(t) = y(t)\exp(t)$ является тогда обобщенным решением уравнения

$$z'(t) = 0 \qquad (z, z' \in L^2(0, 1)). \tag{2}$$

Покажем, что существует такая постоянная C, что $z(t) = C$ при почти всех значениях $t \in (0, 1)$. С этой целью возьмем произвольную функцию $x_0(t) \in C_0^\infty(0, 1)$, удовлетворяющую условию $\int\limits_0^1 x_0(t)\,dt = 1$, и произвольную функцию $x(t) \in C_0^\infty(0, 1)$ и положим

$$u(t) = x(t) - x_0(t)\int\limits_0^1 x(t)\,dt, \qquad w(t) = \int\limits_0^t u(s)\,ds.$$

Так как $\int\limits_0^1 u(s)\,ds = 0$, то $w \in C_0^\infty(0, 1)$. Поэтому, согласно (2),

$$-\int\limits_0^1 z(t)\,w'(t)\,dt = -\int\limits_0^1 z(t)\,u(t)\,dt = 0,$$

т. е.

$$\int\limits_0^1 z(t)\,x(t)\,dt = C\int\limits_0^1 x(t)\,dt, \quad \text{где} \quad C = \int\limits_0^1 z(t)\,x_0(t)\,dt.$$

Отсюда ввиду произвольности выбора функции $x(t) \in C_0^\infty(0, 1)$ следует, что $z(t) = C$ при почти всех значениях $t \in (0, 1)$.

Следовательно, решения уравнения $T^*y = iy$ имеют вид $y(t) = C\exp(-t)$. Таким же способом можно обнаружить, что решения уравнения $T^*y = -iy$ имеют вид $y(t) = C\exp(t)$. Отсюда видно, что оператор T имеет индекс дефекта $(1, 1)$.

Определение 2. Симметрический оператор H, заданный в гильбертовом пространстве X, называется *максимальным симметрическим оператором*, если не существует никакого собственного симметрического расширения оператора H.

Предложение 2. Всякий максимальный симметрический оператор H замкнут и $H = H^{**}$. Всякий самосопряженный оператор является максимальным симметрическим оператором.

Доказательство. Согласно предложению 1 § 3 гл. VII, оператор H^{**} служит замкнутым симметрическим расширением оператора H, откуда и вытекает первая часть доказываемого предложения. Пусть

H_0 — некоторое симметрическое расширение самосопряженного оператора H. Тогда, поскольку $H \subsetneq H_0$ и $H_0 \subsetneq H_0^*$, мы имеем $H_0 \subseteq H_0^* \subseteq H^*$, а так как $H = H^*$, то $H \subseteq H_0 \subsetneq H$. Это и означает, что самосопряженный оператор H является максимальным симметрическим оператором.

Следствие 1. Всякое максимальное симметрическое расширение H_0 заданного симметрического оператора H является также расширением оператора H^{**}.

Доказательство. Из соотношения $H \subsetneq H_0$ следует, что $H_0^* \subsetneq H^*$ и $H^{**} \subseteq H_0^{**}$. Значит, в соответствии с предыдущим предложением $H_0 = H_0^{**}$, что и доказывает следствие 1.

Следствие 2. Если симметрический оператор H удовлетворяет условию $H^* = H^{**}$, то единственным его максимальным симметрическим расширением служит самосопряженный оператор H^*.

Доказательство. Оператор H^{**}, будучи самосопряженным, должен быть максимальным симметрическим оператором. Поэтому всякое максимальное симметрическое расширение H_0 оператора H, которое, согласно следствию 1, служит также и симметрическим расширением оператора H^{**}, совпадает с оператором $H^{**} = H^*$.

Теперь мы можем перейти к следующему определению.

Определение 3. Симметрический оператор H, удовлетворяющий условию $H^* = H^{**}$, называется *в существенном самосопряженным*. Этот термин ввел фон Нейман. По терминологии фон Неймана самосопряженный оператор H называется *гипермаксимальным*.

Пример 2. Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$; определим оператор H формулой $Hx(t) = t \cdot x(t)$ для $x(t) \in C_0^0(-\infty, \infty)$. Ясно, что H — симметрический оператор X. Нетрудно показать, что в данном случае H^* есть не что иное, как оператор координаты, определенный в примере 2 § 3 гл. VII, так что оператор H — в существенном самосопряженный. Оператор H, определяемый условием $Hx(t) = i^{-1}x'(t)$ для функций $x(t) \in C_0^1(-\infty, \infty)$, тоже является в существенном самосопряженным оператором, заданным в пространстве $X = L^2(-\infty, \infty)$. В самом деле, в этом случае H^* — оператор импульса, о котором говорилось в примере 3 § 3 гл. VII.

Теорема 1. Допустим, что индекс дефекта (m, n) некоторого замкнутого симметрического оператора H удовлетворяет условию

$$m = m' + p, \qquad n = n' + p \qquad (p > 0).$$

Тогда существует замкнутое симметрическое расширение H' оператора H, индекс дефекта которого равен (m', n').

Доказательство. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_{p+m'}\}$, $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p, \psi_{p+1}, \ldots, \psi_{p+n'}\}$ — полные ортонормальные системы соответственно подпространств $X_H^+ = D(U_H)^\perp$ и $X_H^- = R(U_H)^\perp$.

Определим изометрическое расширение V оператора U_H, полагая

$$V_x = U_H x \quad \text{при} \quad x \in D(U_H),$$

$$V \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \psi_i \quad \text{для} \quad x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i \in X_H^+,$$

$$V\left(x + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i\right) = Vx + V \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i \quad (x \in D(U_H)).$$

Расширение $V \supseteq U_H$ определено, таким образом, в области $D(V) = D(U_H) \oplus \left\{ z \in X;\ z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i \right\}$, причем $R(V) = R(U_H) \oplus \left\{ u \in X;\ u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \psi_i \right\}$. По теореме 1, гл. VII, § 4, имеем $R(I - U_H)^a = X$. Отсюда ввиду условия $R(I - V) \supseteq R(I - U_H)$ мы по теореме 2, гл. VII, § 4, можем заключить, что существует единственное замкнутое симметрическое расширение H' оператора H, для которого $V = (H' - iI)(H' + iI)^{-1}$. Индекс дефекта оператора H' равен (m', n'), так как $\dim\left(D(V)^{\perp}\right) = m'$, $\dim\left(R(V)^{\perp}\right) = n'$.

Следствие. Для того чтобы замкнутый симметрический оператор H с индексом дефекта (m, n) был максимальным симметрическим оператором, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одно из чисел m, n равнялось нулю.

Доказательство. Необходимость этого требования вытекает из теоремы 1. Достаточность легко доказывается. Пусть для определенности $m = 0$; тогда $U_{H_0} = U_H$ для любого замкнутого симметрического расширения H_0 оператора H, так как $D(U_H) = X$. Отсюда $H_0 = i(I + U_{H_0})(I - U_{H_0})^{-1} = i(I + U_H)(I - U_H)^{-1} = H$. Аналогично доказывается, что и в случае $n = 0$ оператор H не может иметь собственное замкнутое симметрическое расширение.

Пример 3. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ — произвольная полная ортонормированная система (сепарабельного) гильбертова пространства X. Тогда условие

$$U \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_{i+1}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty,$$

определяет замкнутый изометрический оператор U, такой, что $D(U) = X$ и $\dim\left(R(U)^{\perp}\right) = 1$. Если $R(I - U)^a \neq X$, то найдется элемент $x \neq 0$, такой, что $x \in R(I - U)^{\perp}$. Следовательно, $((I - U)x, x) = 0$, и поэтому $(Ux, x) = \|x\|^2 = \|Ux\|^2$. Отсюда

$$\|(I - U)x\|^2 = \|x\|^2 - (Ux, x) - (x, Ux) + \|Ux\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 0,$$

т. е. $Ux = x$; следовательно, согласно определению оператора U, $x = 0$. Полученное противоречие показывает, что $R(I - U)^a = X$. Таким образом, по теореме 2, гл. VII, § 4, оператор U должен быть преобразованием Кэли некоторого замкнутого симметрического оператора H. Индекс дефекта этого оператора H равен (0, 1), поскольку $D(U) = X$, и подпространство $R(U)^{\perp}$ натянуто на вектор φ_1. Итак, оператор H симметричен и максимален, не будучи самосопряженным.

Теорема 2 (Наймарк [3]). Пусть индекс дефекта замкнутого симметрического оператора H_1, заданного в гильбертовом пространстве X_1, равен (m, n). Можно построить гильбертово пространство X, содержащее X_1 как замкнутое линейное подпространство, и замкнутый симметрический оператор H, определенный в X, индекс дефекта которого равен $(m + n, m + n)$, удовлетворяющие условию

$$H_1 = P(X_1) H P(X_1),$$

где $P(X_1)$ — оператор проектирования пространства X на подпространство X_1.

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство X_2 той же размерности, что и X_1. Построим в пространстве X_2 замкнутый симметрический оператор H_2 с индексом дефекта (n, m). Можно, например, положить $X_2 = X_1$ и $H_2 = -H_1$. В этом случае $\{x \in X_2;\ H_2^* x = ix\} = \{x \in X_1;\ H_1^* x = -ix\}$, $\{x \in X_2;\ H_2^* x = -ix\} = \{x \in X_1;\ H_1^* x = ix\}$, так что индекс дефекта оператора H_2 действительно равен (n, m).

Определим теперь в пространстве $X_1 \times X_2$ оператор H вида

$$H\{x, y\} = \{H_1 x, H_2 y\} \quad \text{при} \quad \{x, y\} \in X_1 \times X_2,$$

где

$$x \in D(H_1), \quad y \in D(H_2).$$

Оператор H, заданный в гильбертовом пространстве $X = X_1 \times X_2$, как нетрудно заметить, симметричен и замкнут. Условие $H^*\{x, y\} = i\{x, y\}$ (или условие $H^*\{x, y\} = -i\{x, y\}$) означает, что $H_1^* x = ix$, $H_2^* y = iy$ (соответственно $H_1^* x = -ix$, $H_2^* y = -iy$). Следовательно, индекс дефекта оператора H действительно равен $(m + n, m + n)$.

Следствие. Пусть в соответствии с теоремой 1 $\hat{H}$ — самосопряженное расширение построенного выше оператора, и пусть $\hat{H} = \int \lambda\, d\hat{E}(\lambda)$ — спектральное разложение оператора $\hat{H}$. Так как H и тем более $\hat{H}$ служат расширениями оператора H_1, если рассматривать H_1 как оператор в пространстве $X = X_1 \times X_2$, то имеет место следующее:

Если $x \in D(H_1) \subseteq X_1 = P(X_1)X$, то $x = P(X_1)x \in D(\hat{H})$ и

$$H_1 x = P(X_1)\hat{H}x = P(X_1)\hat{H}P(X_1)x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dF(\lambda)\, x, \tag{3}$$

где $F(\lambda) = P(X_1)\hat{E}(\lambda)P(X_1)$.

Система[1]) операторов $\{F(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty\}$ удовлетворяет, очевидно, следующим условиям:

$$\begin{gathered} F(\lambda) \text{ при каждом } \lambda \text{ есть самосопряженный оператор в } X_1; \\ \text{если } \lambda_1 < \lambda_2, \text{ то } (F(\lambda_1)x,\ x) \leqslant (F(\lambda_2)x,\ x) \text{ при любом } x \in X_1; \\ F(\lambda + 0) = F(\lambda); \\ F(-\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow -\infty} F(\lambda)x = 0, \quad x \in X; \\ F(\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda \uparrow \infty} F(\lambda)x = x \quad \text{при всех } x \in X. \end{gathered} \tag{4}$$

Замечание 1. Для замкнутого симметрического оператора H_1 мы получили представление вида

$$H_1 x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dF(\lambda)\, x \quad \text{при всех} \quad x \in D(H_1),$$

где семейство операторов $\{F(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty\}$ удовлетворяет условиям (4). Это представление мы назовем *обобщенным спектральным разложением* замкнутого симметрического оператора H_1.

Пример 4. Пусть $X_1 = L^2(-\infty,\ 0)$; обозначим через D_1 совокупность всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(-\infty,\ 0)$, таких, что $x(0) = 0$ и $x'(t) \in L^2(-\infty,\ 0)$. Тогда оператор H_1, определенный формулой $H_1 x(t) = i^{-1}x'(t)$ на $D_1 = D(H_1)$, симметричен и максимален, а его индекс дефекта равен (0, 1) (это устанавливается так же, как в примере 1). Положим $X_2 = L^2(0,\ \infty)$, а в качестве области $D_2 \subseteq X_2$ выберем множество всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(0,\ \infty)$, таких, что $x(0) = 0$ и $x'(t) \in L^2(0,\ \infty)$. Оператор H_2 вида $H_2 x(t) = i^{-1}x'(t)$ при $x(t) \in D_2 = D(H_2)$ представляет собой максимальный симметрический оператор с индексом дефекта (1, 0). Теперь можно положить $X = X_1 \times X_2 = L^2(-\infty,\ \infty)$, и тогда оператор H, построенный в доказательстве теоремы 2, определяется формулой $Hx(t) = i^{-1}x'(t)$ для функций $x(t) \in L^2(-\infty,\ \infty)$, таких, что $x(0) = 0$ и $x'(t) \in L^2(-\infty,\ \infty)$.

[1]) Систему операторов $F(\lambda)$, удовлетворяющих условиям (4), называют *обобщенным разложением единицы.* — *Прим. перев.*

Замечание 2. Так как оператор $\hat{H}=\int \lambda\, d\hat{E}(\lambda)$, о котором говорится в теореме 2, служит расширением оператора H_1, для элементов $x \in D(H_1)$ справедливо равенство

$$\|H_1x\|^2=\|\hat{H}x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,\|\hat{E}(\lambda)x\|^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,(\hat{E}(\lambda)x,\ x)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,(\hat{E}(\lambda)P(X_1)x,\ P(X_1)x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,(F(\lambda)x,\ x).$$

Однако из условия $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,(F(\lambda)x,\ x)<\infty$ не следует, вообще говоря, что $x \in D(H_1)$. Следующая теорема относится к этому вопросу.

Теорема 3. Если H_1 — максимальный симметрический оператор, то условие $x \in D(H_1)$ эквивалентно неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,(F(\lambda)x,\ x)<\infty,\quad x \in X_1, \tag{5}$$

где $\{F(\lambda)\}$ — обобщенное разложение единицы, соответствующее обобщенному спектральному разложению $\int \lambda\, dF(\lambda)$ оператора H_1 в пространстве X_1.

Доказательство. Вычисления, проведенные в замечании 2, показывают, что условие $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,(F(\lambda)x,\ x)<\infty$ влечет за собой неравенство $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,\|\hat{E}(\lambda)x\|^2<\infty$, а это означает, что $x \in D(\hat{H})$. Оператор

$$H'=P(X_1)\hat{H}P(X_1),$$

если его рассматривать как оператор, действующий в пространстве X_1, является симметрическим расширением оператора H_1 и $D(H')=D(\hat{H})\cap X_1$. Поэтому из свойства максимальности H_1 следует, что $H_1=H'$. Таким образом, $D(H_1)=D(H')=D(\hat{H})\cap X_1$ и вследствие равенства $H'=P(X_1)\hat{H}P(X_1)$ условие $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,\|\hat{E}(\lambda)x\|^2<\infty$ при

$x \in X_1$ влечет за собой включение $x \in D(H_1)$. Без труда также устанавливается, что для любого элемента $x \in D(H_1)$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(F(\lambda)x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\,\|\hat{E}(\lambda)x\|^2 < \infty.$$

Замечание 3. По теореме 1 всякий замкнутый симметрический оператор может быть расширен до некоторого максимального симметрического оператора H_1, и поэтому, применяя к этому расширению теорему 3, мы видим, что условие (5) в этом случае имеет место. Детальное изложение вопросов, касающихся обобщенного спектрального разложения, см. в работах Ахиезера — Глазмана [1] или Надя [3]. Спектральное представление, полученное для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, может быть с некоторыми модификациями распространено на определенный класс линейных операторов в банаховом пространстве. Эти результаты, принадлежащие Данфорду, можно рассматривать как обобщение „теории элементарных делителей" для бесконечномерных пространств. См. Данфорд — Шварц [6].

16. Групповое кольцо L^1 и тауберова теорема Винера

Обратимся к еще одному важному приложению гельфандовского представления, а именно к доказательству тауберовой теоремы Винера с помощью функционально-операторного подхода.

Линейное пространство $L^1(-\infty, \infty)$ образует кольцо по отношению к операции умножения, определенной как операция свертки

$$(f \times g)(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds. \qquad (1)$$

В самом деле, по теореме Фубини — Тонелли

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds \right| dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-s)|\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt,$$

так что $(f * g)(t) \in L^1(-\infty, \infty)$, если $f, g \in L^1(-\infty, \infty)$. Полученное неравенство показывает, что

$$\|f \times g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|, \qquad (2)$$

где $\|\ \ \|$ — норма в пространстве $L^1(-\infty, \infty)$.