$x \in X_1$ влечет за собой включение $x \in D(H_1)$. Без труда также устанавливается, что для любого элемента $x \in D(H_1)$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\,(F(\lambda)x,\ x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\,\|\hat{E}(\lambda)x\|^2 < \infty.$$

Замечание 3. По теореме 1 всякий замкнутый симметрический оператор может быть расширен до некоторого максимального симметрического оператора H_1, и поэтому, применяя к этому расширению теорему 3, мы видим, что условие (5) в этом случае имеет место. Детальное изложение вопросов, касающихся обобщенного спектрального разложения, см. в работах Ахиезера — Глазмана [1] или Надя [3]. Спектральное представление, полученное для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, может быть с некоторыми модификациями распространено на определенный класс линейных операторов в банаховом пространстве. Эти результаты, принадлежащие Данфорду, можно рассматривать как обобщение „теории элементарных делителей" для бесконечномерных пространств. См. Данфорд — Шварц [6].

16. Групповое кольцо L^1 и тауберова теорема Винера

Обратимся к еще одному важному приложению гельфандовского представления, а именно к доказательству тауберовой теоремы Винера с помощью функционально-операторного подхода.

Линейное пространство $L^1(-\infty, \infty)$ образует кольцо по отношению к операции умножения, определенной как операция свертки

$$(f \times g)(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds. \tag{1}$$

В самом деле, по теореме Фубини — Тонелли

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds \right| dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-s)|\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt,$$

так что $(f * g)(t) \in L^1(-\infty, \infty)$, если $f,\ g \in L^1(-\infty, \infty)$. Полученное неравенство показывает, что

$$\|f \times g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|, \tag{2}$$

где $\|\ \ \|$ — норма в пространстве $L^1(-\infty, \infty)$.

Таким образом, мы доказали

Предложение 1. Если формально присоединить к кольцу L^1 единичный элемент e и условиться считать элементами этого кольца символы $\tilde{z}$ вида

$$\tilde{z} = \lambda e + x, \qquad x \in L^1(-\infty, \infty), \tag{3}$$

то L^1 можно рассматривать как нормированное кольцо, в котором операции и норма определяются следующими правилами:

$$\begin{gathered}(\lambda_1 e + x_1) + (\lambda_2 e + x_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) e + (x_1 + x_2),\\ \alpha(\lambda e + x) = (\alpha\lambda) e + \alpha x,\\ (\lambda_1 e + x_1) \times (\lambda_2 e + x_2) = \lambda_1\lambda_2 e + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + x_1 \times x_2,\\ \|\lambda e + x\| = |\lambda| + \|x\|.\end{gathered} \tag{4}$$

Полученное таким способом нормированное кольцо L^1 называется *групповым кольцом* аддитивной группы R^1 вещественных чисел[1]). Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы найти все максимальные идеалы этого кольца L^1. Один из этих идеалов — само пространство $L^1(-\infty, \infty) = I_0$, из которого кольцо L^1 было получено присоединением единицы e. Найдем теперь все максимальные идеалы $I \neq I_0$ кольца L^1.

Для произвольного максимального идеала I нормированного кольца L^1 обозначим через $(\tilde{z}, I)$ комплексное число, которое соответствует элементу $\tilde{z}$ при гомоморфизме колец $L^1 \to L^1/I$. Таким образом, $(\tilde{z}, I_0) = \lambda$ для $\tilde{z} = \lambda e + x$, $x \in I_0$.

Рассмотрим максимальный идеал I кольца L^1, отличный от I_0. Тогда существует функция $x \in L^1(-\infty, \infty) = I_0$, такая, что $(x, I) \neq 0$. Положим

$$\chi(\alpha) = (x_\alpha, I)/(x, I), \quad \text{где} \quad x_\alpha(t) = x(t + \alpha). \tag{5}$$

Тогда определенная для всех вещественных значений α функция $\chi(\alpha)$ обладает тем свойством, что $\chi(0) = 1$ и $|\chi(\alpha)| \leqslant \|x\|/|(x, I)|$ (последнее неравенство вытекает из того, что $|(x_\alpha, I)| \leqslant \|x_\alpha\| = \|x\|$). Таким образом, функция $\chi(\alpha)$ ограничена по α. Кроме того,

$$|\chi(\alpha + \delta) - \chi(\alpha)| \leqslant \|x_{\alpha+\delta} - x_\alpha\|/|(x, I)|,$$

откуда видно, что функция $\chi(\alpha)$ непрерывна по α, так как, согласно условию (2) из § 1 гл. X,

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\alpha + \delta + t) - x(\alpha + t)|\, dt = 0.$$

---

[1]) Общее определение группового кольца абстрактной коммутативной локально бикомпактной топологической группы см., например, в книге Гельфанда — Райкова — Шилова [5]. — *Прим. перев.*

Из очевидного равенства $(x_{\alpha+\beta} \times x)(t) = (x_\alpha \times x_\beta)(t)$ следует, что

$$(x_{\alpha+\beta}, I)(x, I) = (x_\alpha, I)(x_\beta, I),$$

откуда

$$\chi(\alpha + \beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta). \tag{6}$$

Из равенства (6) вытекает, что существует единственное вещественное число $\xi = \xi(I)$, такое, что

$$\chi(\alpha) = \exp(i \cdot \xi(I) \cdot \alpha). \tag{7}$$

Действительно, так как $\chi(n\alpha) = \chi(\alpha)^n$ и функция $\chi(\alpha)$ ограничена, имеем $|\chi(\alpha)| \leqslant 1$. Но $\chi(\alpha)\chi(-\alpha) = \chi(0) = 1$, поэтому $|\chi(\alpha)| = 1$. Таким образом, функция $\chi(\alpha)$, будучи непрерывным решением уравнения (6) с абсолютной величиной 1, должна иметь вид (7). Из свойства $x_\alpha \times y = x \times y_\alpha$ следует, что $\chi(\alpha)\ (y, I) = (y_\alpha, I)$, откуда видно, что величина $\xi(I)$ в действительности не зависит от выбора функции $x \in L^1(-\infty, \infty)$ и однозначно определяется идеалом I.

Всякое непрерывное решение уравнения (6), абсолютная величина которого тождественно равна единице, называется *непрерывным унитарным характером* аддитивной группы R^1 вещественных чисел.

Характер $\chi(\alpha)$, построенный выше, мы будем называть непрерывным характером группы R^1, порожденным максимальным идеалом $I \neq I_0$.

Покажем теперь, как, зная характер $\chi(\alpha)$, порожденный идеалом I, можно определить максимальный идеал I или, что то же самое, как восстановить величину (z, I) по заданному характеру χ.

Для любой функции $y(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ имеем

$$(x \times y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)\, y(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} x_{-s}(t)\, y(s)\, ds.$$

Поэтому из свойства (5), учитывая непрерывность гомоморфизма колец $L^1 \to L^1/I$, мы получаем

$$(x \times y, I) = (x, I)(y, I) = (x, I) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(-s)\, y(s)\, ds.$$

Отсюда, ввиду того что $(x, I) \neq 0$, мы выводим соотношение

$$(y, I) = \int_{-\infty}^{\infty} y(s) \exp(-i \cdot \xi(I) \cdot s)\, ds. \tag{8}$$

Следовательно, для любого элемента $\tilde{z} = \lambda e + x$, где $x \in L^1(-\infty, \infty)$,

$$(\tilde{z}, I) = (\lambda e, I) + (x, I) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-i \cdot \xi(I) \cdot s)\, ds. \tag{9}$$

Итак, максимальный идеал I, порождающий данный характер χ, определяется однозначно.

Возьмем теперь произвольный (непрерывный, унитарный) характер $\chi(\alpha) = \exp(i \cdot \xi \cdot \alpha)$ группы R^1 и определим отображение

$$\tilde{z} \to \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-i \cdot \xi \cdot s)\, ds \qquad (\tilde{z} = \lambda e + x,\ x \in L^1(-\infty, \infty)). \tag{10}$$

Ясно, что формула (10) определяет гомоморфизм кольца L^1 на поле комплексных чисел, так как по теореме Фубини — Тонелли

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \times x_2)(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt.$$

Это означает, что всякий непрерывный характер χ определяет некоторый максимальный идеал I. Мы будем говорить, что идеал I, построенный таким способом, порождается характером χ. Нетрудно заметить, что идеал, порожденный некоторым характером, порождает этот характер и, обратно, характер, порожденный максимальным идеалом, порождает этот идеал. Кроме того, очевидно, что всякий идеал порождается единственным характером и, обратно, всякий характер порождается единственным идеалом.

Тем самым доказана следующая

Теорема 1 (Гельфанд [4], Райков [1]). Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех максимальных идеалов $I \neq L^1(-\infty, \infty)$ группового кольца L^1 аддитивной группы R^1 вещественных чисел и множеством всех непрерывных унитарных характеров $\chi(\alpha)$ группы R^1. Это соответствие определяется формулой (9).

Покажем, что нормированное кольцо L^1 является полупростым или, что то же самое (см. гл. XI, § 2), справедлива

Теорема 2. В нормированном кольце L^1 не существует обобщенных нильпотентных элементов, отличных от нулевого.

Доказательство. Пусть $x \in L^1(-\infty, \infty)$ и $y \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда, применяя неравенство Шварца, мы получаем

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s) y(s)\, ds \right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)|\, ds \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)| \cdot |y(s)|^2\, ds \right)^{1/2}.$$

По теореме Фубини — Тонелли левая часть принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$ и

$$\|x \times y\|_2 \leqslant \|x\| \cdot \|y\|_2, \tag{11}$$

где $\| \ \|_2$ — норма в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, формула

$$(T_x y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)\, y(s)\, ds \quad \text{для всех} \quad x \in L^1(-\infty, \infty) \tag{12}$$

определяет ограниченный линейный оператор T_x, отображающий пространство $L^2(-\infty, \infty)$ в себя, и, кроме того,

$$\| T_x \|_2 \leqslant \| x \|, \tag{13}$$

$$T_x^* = T_{x^*}, \quad \text{где} \quad x^*(t) = \overline{x(-t)}. \tag{14}$$

Используя теорему Фубини — Тонелли еще раз, мы приходим к заключению, что

$$T_x T_x^* = T_{x \times x^*} = T_{x^* \times x} = T_x^* T_x, \text{ т. е. } T_x \text{—нормальный оператор.} \tag{15}$$

Поэтому (см. гл. XI, § 3) $\| T_x \|_2 = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\| T_x^n \|_2 \right)^{1/n}$. Учитывая теперь, что

$$\| \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ сомножителей}} \| \geqslant \| T_x^n \|_2,$$

мы видим, что если x — обобщенный нильпотентный элемент, то $\| T_x \|_2 = 0$. Основываясь на этом, легко доказать, что в этом случае x — нулевой вектор пространства $L^1(-\infty, \infty)$.

Допустим теперь, что $\tilde{z} = \lambda e + x$, где $x \in L^1(-\infty, \infty)$ — некоторый обобщенный нильпотентный элемент нормированного кольца L^1. Тогда для любого максимального идеала I кольца L^1 должно выполняться соотношение $(\tilde{z}, I) = \lambda + (x, I) = 0$. Следовательно, преобразование Фурье

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt$$

должно тождественно равняться $-(2\pi)^{-1/2} \lambda$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$, так как по известной теореме Римана — Лебега

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt \right| =$$

$$= \left| 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) - x\left(t + \frac{\pi}{\xi}\right) \right] \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) - x\left(t + \frac{\pi}{\xi}\right) \right| dt \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Таким образом, всякий обобщенный нильпотентный элемент $\tilde{z} \in L^1$ имеет вид $\tilde{z} = 0 \cdot e + x = x$, где $x \in L^1(-\infty, \infty)$, и поэтому, как показано выше, $\tilde{z} = x = 0$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующую *тауберову теорему Винера* [2].

Теорема 3. Допустим, что преобразование Фурье

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt$$

некоторой функции $x(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ не обращается в нуль ни при каком вещественном ξ. Тогда для всякой функции $y(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать положительное целое число N, комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ и вещественные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| y(t) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x(t - \beta_j) \right| dt < \varepsilon. \tag{16}$$

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что существует такой элемент $\tilde{z} \in L^1$, для которого

$$\| y - x \times \tilde{z} \| \leqslant \varepsilon/2 \text{ }^{1)}. \tag{17}$$

---

[1]) Действительно, пусть $\tilde{z} = \lambda e + g$, $g \in L^1(-\infty, \infty)$. Примем за комбинации $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j x(t - \beta_j)$ суммы вида $A \equiv \lambda x(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_1} x(t - k\mu) \int_{k\mu}^{(k+1)\mu} g(u)\, du$.

Тогда

$$\lim_{\substack{\mu N_1 \to \infty \\ \mu \to 0}} \| x \times \tilde{z} - A \| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\mu \to 0} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u) g(u)\, du - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - k\mu) \int_{k\mu}^{(k+1)\mu} g(u)\, du \right\| +$$

$$+ \lim_{\substack{\mu N_1 \to \infty \\ \mu \to 0}} \left\| \sum_{|k| \geqslant N_1 + 1} x(t - k\mu) \int_{k\mu}^{(k+1)\mu} g(u)\, du \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\mu \to 0} \| g \| \cdot \max_{0 \leqslant \delta \leqslant \mu} \int_{-\infty}^{\infty} | x(t + \delta) - x(t) |\, dt + \lim_{\substack{N_1\mu \to \infty \\ \mu \to 0}} \| f \| \int_{|u| \geqslant N_1\mu} | g(u) |\, du = 0.$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)-y^{(\alpha)}(t)|\,dt=0,$$
$$\text{где } y^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y(t-s)\,\frac{1-\cos\alpha s}{\alpha s^2}\,ds. \tag{18}$$

В самом деле, так как $\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos\alpha s)(\alpha s^2)^{-1}\,ds=\pi$ при $\alpha>0$, то

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)-y^{(\alpha)}(t)|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant(\pi)^{-1}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos s)}{s^2}\,ds\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|y(t)-y\left(t-\frac{s}{\alpha}\right)\right|dt\right\}=0.$$

Далее, используя равенство

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-|\xi|/\alpha)\,e^{i\xi u}\,d\xi=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{0}^{\alpha}\left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)\cos u\xi\cdot d\xi=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{u}\int_{0}^{\alpha}\left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)d(\sin u\xi)=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{0}^{\alpha}\frac{\sin u\xi}{u\alpha}\,d\xi=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1-\cos u\alpha}{u^2\alpha}$$

и применяя теорему Планшереля (гл. VI, § 2), мы находим, что

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1-\cos\alpha u}{\alpha u^2}\,e^{-iu\xi}\,du=\begin{cases}1-|\xi|/\alpha & \text{при } |\xi|<\alpha,\\ 0 & \text{при } |\xi|\geqslant\alpha.\end{cases} \tag{19}$$

Поэтому найдется функция вида $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(t-\beta_j)$, такая, что $\|x\times\tilde{z}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(t-\beta_j)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, $\|y-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(t-\beta_j)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, что и требуется установить. — *Прим. перев.*

Следовательно, согласно равенству Парсеваля для преобразования Фурье, функция $y^{(\alpha)}(t)$ удовлетворяет при $|\xi| \geqslant \alpha$ уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{(\alpha)}(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt = 0. \tag{20}$$

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что функция $y \in L^1(-\infty, \infty)$ в равенстве (17) удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant \alpha, \tag{21}$$

где α — фиксированное достаточно большое положительное число.

Выберем теперь положительное число β и достаточно большое положительное число γ такими, чтобы оба отрезка $[-\beta-\gamma, -\beta+\gamma]$ и $[\beta-\gamma, \beta+\gamma]$ содержали отрезок $[-\alpha, \alpha]$. Обозначим через $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ соответственно характеристические функции отрезков $[-\gamma, \gamma]$ и $[-\beta, \beta]$. Тогда

$$u(\xi) = (2\beta)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} C_1(\xi - \eta) C_2(\eta)\, d\eta = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \in [-\alpha, \alpha], \\ 0 & \text{при достаточно больших } |\xi|, \end{cases} \tag{22}$$

$0 \leqslant u(\xi) \leqslant 1$ для всех вещественных ξ.

Равенство Парсеваля для преобразования Фурье показывает, что

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2\beta} (2\pi)^{1/2} \hat{C}_1(t) \hat{C}_2(t).$$

Поэтому, используя теорему Планшереля, мы видим, что функция $\hat{u}(t)$ принадлежит $L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$. Значит, можно применить теорему 1 и, следовательно,

$$f(t) = \hat{u}(t) = (2\pi)^{-1/2} (u, I_t), \tag{23}$$

где I_t — некоторый максимальный идеал, отличный от I_0. Кроме того, по теореме Планшереля, обратное преобразование Фурье функции $f(t)$ равно $u(\xi)$, т. е.

$$u(\xi) = (2\pi)^{-1/2} (f, I_{-\xi}). \tag{24}$$

Выберем теперь элемент кольца L^1, равный $e - (2\pi)^{-1/2} f = \tilde{g}$. Тогда из доказанного выше следует, что

$$\begin{aligned} &0 \leqslant (\tilde{g}, I_\xi) \leqslant 1; \ (\tilde{g}, I_\xi) = 0 \quad \text{при всех } \xi \in [-\alpha, \alpha]; \\ &(\tilde{g}, I_\xi) = 1 \ \text{для всех достаточно больших } |\xi|. \end{aligned} \tag{25}$$

С другой стороны, поскольку $x^*(t) = \overline{x(-t)}$, имеет место соотношение $\overline{(x, I_\xi)} = (x^*, I_\xi)$. Таким образом, в соответствии с предположением теоремы $(x^* \times x,\ I_\xi) = |(x,\ I_\xi)|^2 > 0$ для всех вещественных значений ξ. Значит, элемент

$$\tilde{g} + x^* \times x \in L^1$$

удовлетворяет условию $(\tilde{g} + x^* \times x,\ I) > 0$ для всех максимальных идеалов I кольца L^1. Следовательно, в кольце L^1 должен существовать обратный элемент $(\tilde{g} + x^* \times x)^{-1}$. Обозначим через $\tilde{z}$ элемент

$$\tilde{z} = (\tilde{g} + x \times x^*)^{-1} \times x^* \times y. \tag{26}$$

Из (4) следует, что $x \times \tilde{z}$ принадлежит $L^1(-\infty,\ \infty)$. Кроме того, для всякого вещественного числа ξ

$$(x \times \tilde{z},\ I_\xi) = (x,\ I_\xi)(\tilde{z},\ I_\xi) = (x,\ I_\xi)\frac{(x^*,\ I_\xi)(y,\ I_\xi)}{(\tilde{g},\ I_\xi) + (x,\ I_\xi)(x^*,\ I_\xi)}.$$

Отсюда ввиду условия (25) и предположения $(y,\ I_\xi) = 0$ при $|\xi| \geqslant a$ мы получаем

$$(x \times \tilde{z},\ I_\xi) = (y,\ I_\xi) \text{ при всех вещественных } \xi.$$

По теореме 2 нормированное кольцо L^1 является полупростым. Следовательно, $x \times \tilde{z} = y$, что и завершает доказательство теоремы 3.

Следствие. Пусть функция $k_1(t)$ принадлежит пространству $L^1(-\infty,\ \infty)$ и преобразование Фурье этой функции не обращается в нуль ни при каких вещественных значениях аргумента. Возьмем произвольную функцию $k_2(t)$, принадлежащую $L^1(-\infty,\ \infty)$, и любую функцию $f(t)$, ограниченную и измеримую по Бэру в промежутке $(-\infty,\ \infty)$. Допустим, что существует такая постоянная C, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) f(s)\,ds = C \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t)\,dt. \tag{27}$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s) f(s)\,ds = C \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t)\,dt. \tag{28}$$

Доказательство. Можно считать, что $C = 0$. Для функций $k_2(t)$ вида $k_2(t) = (x \times k_1)(t)$, где $x(t) \in L^1(-\infty,\ \infty)$, условие (28), очевидно, выполняется. Нетрудно показать, что равенство (28) справедливо и для таких функций $k_2(t)$, которые можно представить в виде $k_2(t) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} k^{(n)}(t)$ в пространстве $L^1(-\infty, \infty)$, где $k^{(n)}(t) \in L^1(-\infty,\ \infty)$ — функции, для которых соотношение (28) имеет место. В таком случае по теореме 3 равенство (28) выполняется и для произвольной функции $k_2(t) \in L^1(-\infty,\ \infty)$.

Замечание. Н. Винер [1], [2], [3], применяя это следствие, дал единую трактовку некоторых классических результатов, относящихся к предельным соотношениям для рядов и интегралов, и получил новые доказательства теорем о простых числах. См. также Питт [1]. Приведенное здесь доказательство теоремы 3 заимствовано из работ Фукамия [1] и Сигала [1]. См. также Наймарк [1], Риккарт [1] и библиографию, приведенную в этих книгах. Чтобы проиллюстрировать, насколько широки приложения указанного следствия, мы воспроизводим здесь принадлежащее Винеру доказательство так называемой специальной тауберовой теоремы. В формулировке Литлвуда эта теорема звучит следующим образом.

Теорема 4. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $|x| < 1$ к функции $s(x)$; пусть

$$\lim_{x \to 1-0} s(x) = C. \tag{29}$$

Кроме того, допустим, что

$$\sup_{n \geqslant 1} n|a_n| = K < \infty. \tag{30}$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = C. \tag{31}$$

Доказательство. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{[x]} a_n$. Так как

$$|f(x) - s(e^{-1/x})| = \left|\sum_{n=1}^{[x]} a_n (1 - e^{-n/x}) - \sum_{n=[x]+1}^{\infty} a_n e^{-n/x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{[x]} \frac{K}{n} \cdot \frac{n}{x} + \sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{K}{n} e^{-n/x} \leqslant 2K + K \int_{[x]}^{\infty} e^{-u/x} u^{-1}\, du \leqslant$$

$$\leqslant 2K + K \int_{1}^{\infty} e^{-u} u^{-1}\, du = \text{const},$$

то функция $f(x)$ ограничена.

Поэтому, интегрируя по частям, мы находим, что

$$s(e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx} = \int_{-0}^{\infty} e^{-ux}\, df(u) = \int_{0}^{\infty} x e^{-ux} f(u)\, du.$$

Отсюда

$$C = \lim_{x\to 0} \int_0^\infty x e^{-ux} f(u)\, du = \lim_{\xi\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi} e^{-e^{\eta-\xi}} f(e^\eta)\, e^\eta\, d\eta. \qquad (31')$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) f(e^s)\, ds = C \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t)\, dt, \quad \text{где} \quad k_1(t) = e^{-t} e^{-e^{-t}}, \qquad (32)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} e^{-e^{-t}}\, dt = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t) e^{-iut}\, dt = \int_0^\infty x^{iu} e^{-x}\, dx = \Gamma(1+iu) \neq 0.$$

Поэтому мы можем применить доказанное следствие и получить для функции

$$k_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant 0, \\ e^{-t} & \text{при} \quad t > 0 \end{cases}$$

предельное соотношение

$$C = C \int_0^\infty e^{-t}\, dt = C \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t)\, dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s) f(e^s)\, ds = \lim_{x\to\infty} x^{-1} \int_0^x f(y)\, dy.$$

Отсюда следует, что при $\lambda > 0$

$$C = \frac{(1+\lambda)C - C}{\lambda} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda x} \left\{ \int_0^{(1+\lambda)x} f(y)\, dy - \int_0^x f(y)\, dy \right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} f(y)\, dy =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left\{ f(x) + \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} [f(y) - f(x)]\, dy \right\}. \qquad (33)$$

Из условия (30) видно, что при достаточно больших значениях x

$$\left|\frac{1}{\lambda x}\int\limits_{x}^{(1+\lambda)x}[f(y)-f(x)]\,dy\right| \leqslant \frac{1}{\lambda x}\int\limits_{x}^{(1+\lambda)x}\sum_{n=[x]+1}^{[y]}\frac{K}{n}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=[x]+1}^{[(1+\lambda)x]}\frac{K}{[x]} \leqslant \frac{[\lambda x]K}{[x]} \leqslant 2\lambda K.$$

Используя соотношение (33), мы приходим к оценке

$$\varlimsup_{x\to\infty}|f(x)-C| \leqslant 2\lambda K,$$

а так как положительное число λ можно выбрать произвольно, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C,$$

откуда и вытекает формула (31).