ГЛАВА XII

Другие теоремы о представлении в линейных пространствах

В этой главе мы докажем три теоремы о представлении, относящиеся к линейным пространствам. Первая из них, *теорема Крейна — Мильмана*, утверждает, что непустое выпуклое бикомпактное подмножество K локально выпуклого линейного топологического пространства совпадает с замыканием выпуклой оболочки так называемых *крайних точек* множества K. Две другие теоремы относятся к *функциональным представлениям векторных структур*.

1. Крайние точки. Теорема Крейна — Мильмана

Определение. Пусть K — некоторое подмножество вещественного или комплексного линейного пространства X. Непустое подмножество $M \subseteq K$ называется *крайним подмножеством* K, если выпуклая комбинация вида $\alpha k_1 + (1-\alpha) k_2$, $0 < \alpha < 1$, двух точек k_1 и k_2 множества K принадлежит M только в том случае, когда обе точки k_1 и k_2 лежат в M. Крайнее подмножество множества K, состоящее из одной точки, называется *крайней точкой* K.

Пример. В трехмерном евклидовом пространстве поверхность замкнутого шара является крайним подмножеством этого шара, а всякая точка этой поверхности представляет собой крайнюю точку.

Теорема (Крейн — Мильман). Всякое непустое бикомпактное выпуклое подмножество K локально выпуклого линейного топологического пространства X содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Доказательство. Само множество K служит крайним подмножеством для K. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех бикомпактных крайних подмножеств N множества K. Упорядочим $\mathfrak{M}$ с помощью отношения включения. Ясно, что если $\mathfrak{M}_1$ — линейно упорядоченное подмножество в $\mathfrak{M}$, то непустое множество $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}_1} M$ служит бикомпактным крайним подмножеством в K, которое представляет собой миноранту для $\mathfrak{M}_1$.

Следовательно, по лемме Цорна семейство $\mathfrak{M}$ содержит минимальный элемент M_0. Допустим, что в M_0 входят две различные точки x_0 и y_0. Тогда на X определен непрерывный линейный функционал f, такой, что $f(x_0) \neq f(y_0)$. Можно считать, что $\operatorname{Re} f(x_0) \neq \operatorname{Re} f(y_0)$. Так как множество M_0 бикомпактно, подмножество

$M_1 = \{x \in M_0;\ \operatorname{Re} f(x) = \inf_{y \in M_0} \operatorname{Re} f(y)\}$ является собственным в M_0. Но, с другой стороны, если k_1 и k_2 — такие две точки из K, что $\alpha k_1 + (1-\alpha) k_2 \in M_1$ при некотором значении α, удовлетворяющем неравенству $0 < \alpha < 1$, то, поскольку M_0 — крайнее подмножество, обе точки k_1 и k_2 должны принадлежать M_0. Из определения множества M_1 вытекает, что k_1 и k_2 лежат в M_1. Следовательно, M_1 является замкнутым крайним собственным подмножеством в M_0. Но последнее заключение противоречит тому, что M_0 — минимальный элемент из $\mathfrak{M}$. Отсюда вытекает, что M_0 состоит из одной точки, которая и является крайней точкой множества K.

Следствие. Пусть K — непустое бикомпактное выпуклое подмножество вещественного локально выпуклого линейного топологического пространства X. Обозначим через E совокупность всех крайних точек множества K. Тогда K совпадает с наименьшим замкнутым множеством, содержащим все *выпуклые комбинации* вида $\sum_i \alpha_i e_i$ $\left(\alpha_i \geqslant 0,\ \sum_i \alpha_i = 1\right)$ точек $e_i \in E$, т. е. K представляет собой замыкание *выпуклой оболочки* $\operatorname{Conv}(E)$ множества E.

Доказательство. Множество $\operatorname{Conv}(E)^a$ принадлежит K, так как K бикомпактно, выпукло и $E \subseteq K$. Допустим, что существует точка k_0, принадлежащая $(K - \operatorname{Conv}(E)^a)$. В этом случае можно выбрать точку $c \in \operatorname{Conv}(E)^a$ так, что $(k_0 - c) \notin (\operatorname{Conv}(E)^a - c)$. Множество $(\operatorname{Conv}(E)^a - c)$ выпукло, бикомпактно и содержит точку $x = 0$, следовательно, по теореме 3′ гл. IV, § 6, существует непрерывный вещественный функционал f на X, такой, что

$$f(k_0 - c) > 1 \quad \text{и} \quad f(k - c) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (k - c) \in (\operatorname{Conv}(E)^a - c).$$

Положим $K_1 = \{x \in K;\ f(x) = \sup_{y \in K} f(y)\}$. Тогда, поскольку $k_0 \in K$, множество $K_1 \cap E$ должно быть пустым. Кроме того, так как множество K бикомпактно, K_1 представляет собой замкнутое крайнее подмножество в K. С другой стороны, всякое крайнее подмножество множества K_1 является также крайним подмножеством в K, и поэтому любая крайняя точка из K_1 (существование таких точек вытекает из предыдущей теоремы) является также крайней точкой множества K. Но множество $K_1 \cap E$, как было показано, пусто, и мы приходим к противоречию.

Замечание. Приведенные выше теорема и следствие были впервые доказаны Крейном и Мильманом [1]. Данное здесь доказательство заимствовано у Келли [2] [1]). Отметим, что крайними точками единич-

[1]) Приведенное доказательство опирается на теорему 3′, гл. IV, § 6, относящуюся к вещественным пространствам, но доказываемое утверждение справедливо и для комплексных пространств, см., например, Данфорд — Шварц [1]. — *Прим. перев.*

ного шара $S = \{x \in X, \|x\| \leqslant 1\}$ гильбертова пространства X служат точки поверхности этого шара, т. е. точки, имеющие норму 1 (см. гл. I, § 5 (1)). Приложения понятия крайних точек к конкретным функциональным пространствам см., например, в книге Гофмана [1].

Простой пример. Обозначим через $C[0, 1]$ пространство вещественных непрерывных функций $x(t)$, заданных на сегменте $[0, 1]$, с нормой $\|x\| = \max|x(t)|$. Сопряженным пространством $X' = C[0, 1]'$ служит пространство вещественных бэровских мер на $[0, 1]$ с ограниченными полными вариациями. Единичный шар K пространства X' бикомпактен в слабой * топологии X' (см. теорему 1 из приложения к гл. IV). Нетрудно заметить, что между крайними точками из K и линейными функционалами $f_{t_0} \in X'$ вида $\langle x, f_{t_0}\rangle = x(t_0)$, $t_0 \in [0, 1]$, существует взаимно однозначное соответствие. В таком случае сформулированное следствие означает, что всякий линейный функционал $f \in X'$ может быть представлен как слабый * предел функционалов вида

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x)(t_j), \quad \text{где} \quad \alpha_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \quad \text{и} \quad t_j \in [0, 1].$$

Шоке [1] установил недавно следующий более точный результат: если X — метрическое пространство, то множество E является G_δ-множеством и для любого $x \in K$ существует неотрицательная мера Бэра $\mu_x(B)$, определенная на бэровских множествах B из X, такая, что

$$\mu_x(X - E) = 0, \quad \mu_x(E) = 1 \quad \text{и} \quad x = \int_E y\mu_x(dy).$$

По поводу единственности μ_x см. Шоке — Мейер [2] и указанную там литературу.

2. Векторные структуры

Понятие „положительности“ в применении к конкретным функциональным пространствам весьма важно как в теоретическом отношении, так и для практических приложений. Абстрактная трактовка понятия „положительности“ была предложена Риссом [6] и разрабатывалась в дальнейшем многими авторами, в частности, Фрейденталем [2] и Биркгофом [1] [1]). Соответствующие результаты составляют содержание теории *векторных структур*. Мы начнем с определения векторной структуры.

[1]) Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах интенсивно разрабатывался советскими математиками — Л. В. Канторовичем [2*], М. Г. Крейном [3*], [4*] и др. Исторические сведения по этому вопросу и подробную библиографию см., например, в монографии Б. З. Вулиха [2*]. — *Прим. перев.*