ного шара $S=\{x\in X,\ \|x\|\leqslant 1\}$ гильбертова пространства X служат точки поверхности этого шара, т. е. точки, имеющие норму 1 (см. гл. I, § 5 (1)). Приложения понятия крайних точек к конкретным функциональным пространствам см., например, в книге Гофмана [1].

Простой пример. Обозначим через $C[0, 1]$ пространство вещественных непрерывных функций $x(t)$, заданных на сегменте $[0, 1]$, с нормой $\|x\|=\max|x(t)|$. Сопряженным пространством $X=C[0, 1]'$ служит пространство вещественных бэровских мер на $[0, 1]$ с ограниченными полными вариациями. Единичный шар K пространства X бикомпактен в слабой * топологии X (см. теорему 1 из приложения к гл. IV). Нетрудно заметить, что между крайними точками из K и линейными функционалами $f_{t_0}\in X$ вида $\langle x, f_{t_0}\rangle=x(t_0)$, $t_0\in[0, 1]$, существует взаимно однозначное соответствие. В таком случае сформулированное следствие означает, что всякий линейный функционал $f\in X$ может быть представлен как слабый * предел функционалов вида

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)(t_j),\quad \text{где}\quad \alpha_j>0,\qquad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1\quad \text{и}\quad t_j\in[0, 1].$$

Шоке [1] установил недавно следующий более точный результат: если X — метрическое пространство, то множество E является G_δ-множеством и для любого $x\in K$ существует неотрицательная мера Бэра $\mu_x(B)$, определенная на бэровских множествах B из X, такая, что

$$\mu_x(X-E)=0,\qquad \mu_x(E)=1\quad \text{и}\quad x=\int_E y\mu_x(dy).$$

По поводу единственности μ_x см. Шоке — Мейер [2] и указанную там литературу.

2. *Векторные структуры*

Понятие „положительности" в применении к конкретным функциональным пространствам весьма важно как в теоретическом отношении, так и для практических приложений. Абстрактная трактовка понятия „положительности" была предложена Риссом [6] и разрабатывалась в дальнейшем многими авторами, в частности, Фрейденталем [2] и Биркгофом [1] [1]). Соответствующие результаты составляют содержание теории *векторных структур*. Мы начнем с определения векторной структуры.

---

[1]) Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах интенсивно разрабатывался советскими математиками — Л. В. Канторовичем [2*], М. Г. Крейном [3*], [4*] и др. Исторические сведения по этому вопросу и подробную библиографию см., например, в монографии Б. З. Вулиха [2*]. — *Прим. перев.*

Определение 1. Вещественное линейное пространство X называется *векторной структурой*, если X является структурой по отношению частичного упорядочения $x \leqslant y$, удовлетворяющему условиям

$$\text{если } x \leqslant y, \text{ то } x+z \leqslant y+z; \tag{1}$$

$$\text{если } x \leqslant y, \text{ то } \alpha x \leqslant \alpha y \ (\text{или } \alpha x \geqslant \alpha y)$$
$$\text{при всех } \alpha \geqslant 0 \ (\text{соответственно } \alpha \leqslant 0). \tag{2}$$

Предложение 1. Для произвольного элемента x векторной структуры X определим выражения

$$x^+ = x \vee 0 \quad \text{и} \quad x^- = x \wedge 0. \tag{3}$$

Тогда

$$x \vee y = (x-y)^+ + y, \qquad x \wedge y = -((-x) \vee (-y)). \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что взаимно однозначные отображения $x \to x+z$ и $x \to \alpha x$ $(\alpha > 0)$ пространства X на себя сохраняют отношение частичного упорядочения, установленное в X.

Пример. Совокупность $A(S, \mathfrak{B})$ всех вещественных σ-аддитивных функций множества $x(B)$, заданных и конечных на σ-аддитивном семействе $(S, \mathfrak{B})$ множеств $B \subseteq S$, с операциями

$$(x+y)(B) = x(B) + y(B), \qquad (\alpha x)(B) = \alpha x(B)$$

и отношением частичного упорядочения $x \leqslant y$, определяемым условием $x(B) \leqslant y(B)$ при $B \in \mathfrak{B}$, образует векторную структуру. В этом случае x^+ есть не что иное, как положительная вариация $\bar{V}(x; B)$ меры x на множестве B:

$$x^+(B) = \sup_{\substack{N \subseteq B \\ N \in \mathfrak{B}}} x(N) = \bar{V}(x; B). \tag{5}$$

Доказательство. Мы должны показать, что $\bar{V}(x; B) = (x \vee 0)(B)$. Ясно, что $\bar{V}(x; B) \geqslant 0$ и $x(B) \leqslant \bar{V}(x; B)$ на $\mathfrak{B}$. Если $0 \leqslant y(B)$ и $x(B) \leqslant y(B)$ для $B \in \mathfrak{B}$, то $y(B) = y(N) + y(B-N) \geqslant x(N)$ при любом $N \subseteq B$, так что $y(B) \geqslant \bar{V}(x; B)$ на семействе $\mathfrak{B}$.

Предложение 2. Для всякой векторной структуры X выполняются следующие условия:

$$x \underset{\wedge}{\overset{\vee}{}} y + z = (x+z) \underset{\wedge}{\overset{\vee}{}} (y+z), \tag{6}$$

$$\alpha(x \underset{\wedge}{\overset{\vee}{}} y) = (\alpha x) \underset{\wedge}{\overset{\vee}{}} (\alpha y) \quad \text{при } \alpha > 0, \tag{7}$$

$$\alpha(x \underset{\wedge}{\overset{\vee}{}} y) = (\alpha x) \underset{\vee}{\overset{\wedge}{}} (\alpha y) \quad \text{при } \alpha < 0, \tag{8}$$

$$x \wedge y = -(-x) \vee (-y), \ x^- = -(-x)^+, \ x^+ = -(-x)^-. \tag{9}$$

Доказательство. Свойства (6) — (9) вытекают из (1) и (2).
Следствие.

$$x+y=x\vee y+x\wedge y, \text{ в частности } x=x^{+}+x^{-}. \tag{10}$$

Доказательство. Мы имеем

$$x\vee y-x-y=0\vee(y-x)-y=(-y)\vee(-x)=-(y\wedge x).$$

Предложение 3. Всякая векторная структура X обладает следующими свойствами:

$$x \underset{\wedge}{\vee} y=y \underset{\wedge}{\vee} x \text{ (коммутативность)}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} x\vee(y\vee z)&=(x\vee y)\vee z=\sup(x,\ y,\ z), &(12)\\ x\wedge(y\wedge z)&=(x\wedge y)\wedge z=\inf(x,\ y,\ z), &(13)\end{aligned}\right\}\text{ (ассоциативность)}$$

$$\left.\begin{aligned} (x\wedge y)\vee z&=(x\vee z)\wedge(y\vee z), &(14)\\ (x\vee y)\wedge z&=(x\wedge z)\vee(y\wedge z). &(15)\end{aligned}\right\}\text{ (дистрибутивность)}$$

Доказательство. Мы должны доказать только свойство дистрибутивности. Ясно, что $(x\wedge y)\vee z\leqslant x\vee z,\ y\vee z$. Пусть $w\leqslant x\vee z,\ y\vee z$. Тогда $w\leqslant x\vee z=x+z-x\wedge z$, и поэтому $x+z\geqslant w+x\wedge z$. Точно так же $y+z\geqslant w+y\wedge z$. Следовательно,

$$w+(x\wedge z)\wedge(y\wedge z)=(w+x\wedge z)\wedge(w+y\wedge z)\leqslant$$
$$\leqslant(x+z)\wedge(y+z)=x\wedge y+z,$$

и поэтому

$$w\leqslant(x\wedge y)+z-(x\wedge y)\wedge z=(x\wedge y)\vee z.$$

Тем самым мы установили (14); свойство (15) доказывается при помощи подстановки в (14) соответственно $-x$, $-y$ и $-z$ вместо x, y и z.

Замечание 1. *Дистрибутивное тождество*

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \tag{16}$$

в произвольной структуре может и не выполняться. Структуры, удовлетворяющие этому тождеству, называются ***дистрибутивными***. *Модулярное тождество*:

$$\text{если } x\leqslant z, \text{ то } x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z \tag{17}$$

слабее дистрибутивного тождества (15). Структуры, удовлетворяющие условию (17), называются ***модулярными***. Рассмотрим некоторую группу G. Совокупность всех инвариантных подгрупп N группы G, частично упорядоченная отношением включения, образует модулярную структуру, если определить $N_1\vee N_2$ как инвариантную подгруппу,

порожденную подгруппами N_1 и N_2 [1]), а $N_1 \wedge N_2$ — как инвариантную подгруппу $N_1 \cap N_2$.

Замечание 2. Типичным примером *дистрибутивных структур* являются *булевы алгебры*: дистрибутивная структура B называется булевой алгеброй, если выполняются следующие условия: (1°) в B существуют элементы 0 (*нуль*) и I (*единица*), такие, что $0 \leqslant x \leqslant I$ для любого $x \in B$; (2°) для любого $x \in B$ существует однозначно определенный элемент x', называемый *дополнением* x, такой, что $x \vee x' = I$, $x \wedge x' = 0$. Совокупность всех подмножеств некоторого фиксированного множества, частично упорядоченная отношением включения, представляет собой пример булевой алгебры.

Предложение 4. Определим для векторной структуры X понятие абсолютной величины элемента

$$|x| = x \vee (-x). \tag{18}$$

Тогда

$$|x| \geqslant 0; \qquad |x| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0. \tag{19}$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \qquad |\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|. \tag{20}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$x^+ \wedge (-x^-) = x^+ \wedge (-x)^+ = 0. \tag{21}$$

Действительно, $0 = x - x = x \vee (-x) + x \wedge (-x) \geqslant 2(x \wedge (-x))$, и поэтому ввиду (14) $0 = (x \wedge (-x)) \vee 0 = x^+ \wedge (-x)^+$. Таким образом,

$$x^+ - x^- = x^+ + (-x)^+ = x^+ \vee (-x)^+.$$

С другой стороны, из неравенств $x \vee (-x) \geqslant x \wedge (-x) \geqslant -((-x) \vee x)$ следует, что $x \vee (-x) \geqslant 0$, откуда, согласно (21),

$$x \vee (-x) = (x \vee (-x)) \vee 0 = x^+ \vee (-x)^+ = x^+ + (-x)^+.$$

Итак, мы показали, что

$$x^+ - x^- = x^+ + (-x)^+ = x^+ \vee (-x)^+ = x \vee (-x). \tag{22}$$

Остается доказать (19) и (20). Если $x = x^+ + x^- \neq 0$, то либо x^+, либо $(-x^-) > 0$, так что $|x| = x^+ \vee (-x^-) > 0$. Далее $|\alpha x| = (\alpha x) \vee (-\alpha x) = |\alpha| (x \vee (-x)) = |\alpha| \, |x|$. Из условия $|x| + |y| \geqslant x + y$, $-x - y$ получается неравенство $|x| + |y| \geqslant (x+y) \vee (-x-y) = |x+y|$.

Замечание. Разложение $x = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge (-x^-) = 0$, называется *жордановым разложением* элемента x. Элементы x^+, x^-

---

[1]) Если G — мультипликативная группа, то инвариантная подгруппа, порожденная инвариантными подгруппами N_1, N_2, определяется как подгруппа элементов вида xy ($x \in N_1$, $y \in N_2$). — *Прим. перев.*

и $|x|$ отвечают соответственно *положительной вариации, отрицательной вариации и полной вариации* функции $x(t)$ с ограниченной вариацией.

Предложение 5. Для всякого $y \in X$ имеем

$$|x - x_1| = |x \vee y - x_1 \vee y| + |x \wedge y - x_1 \wedge y|. \qquad (23)$$

Доказательство. Для любых $a, b \in X$

$$|a-b| = (a-b)^+ - (a-b)^- = a \vee b - b - (a \wedge b - b) = a \vee b - a \wedge b.$$

Поэтому правая часть (23), согласно (10), (14) и (15), равна

$$(x \vee y) \vee x_1 - (x \vee y) \wedge (x_1 \vee y) + (x \wedge y) \vee (x_1 \wedge y) - \\ - (x \wedge y) \wedge x_1 = \\ = (x \vee x_1) \vee y - (x \wedge x_1) \vee y + (x \vee x_1) \wedge y - (x \wedge x_1) \wedge y = \\ = x \vee x_1 + y - (x \wedge x_1 + y) = x \vee x_1 - x \wedge x_1 = |x - x_1|.$$

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ элементов векторной структуры X называется *O-сходящейся* к элементу $x \in X$, $x = O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если существует такая последовательность $\{w_n\}$, что $|x - x_n| \leqslant w_n$ и $w_n \downarrow 0$. Здесь $w_n \downarrow 0$ означает, что $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots$ и $\bigwedge\limits_{n\geqslant 1} w_n = 0$. Если $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ последовательности $\{x_n\}$ существует, то он определяется однозначно. В самом деле, если допустить, что $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, то $|x - x_n| \leqslant w_n$, $w_n \downarrow 0$ и $|y - x_n| \leqslant u_n$, $u_n \downarrow 0$. Поэтому $|x - y| \leqslant |x - x_n| + |x_n - y| \leqslant w_n + u_n$ и $(w_n + u_n) \downarrow 0$, так как $w_n + \bigwedge\limits_{n\geqslant 1} u_n \geqslant \bigwedge\limits_{n\geqslant 1} (w_n + u_n)$. Отсюда вытекает, что $x = y$.

Предложение 6. Операции $x + y$, $x \vee y$ и $x \wedge y$ непрерывны по отношению к O-lim.

Доказательство. Пусть $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Тогда $|x + y - x_n - y_n| \leqslant |x - x_n| + |y - y_n|$ и, следовательно, $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$. Из (23) видно, что

$$|x \overset{\vee}{\wedge} y - x_n \overset{\vee}{\wedge} y_n| \leqslant |x \overset{\vee}{\wedge} y - x_n \overset{\vee}{\wedge} y| + |x_n \overset{\vee}{\wedge} y - x_n \overset{\vee}{\wedge} y_n| \leqslant \\ \leqslant |x - x_n| + |y - y_n|,$$

откуда $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \overset{\vee}{\wedge} y_n) = (O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \overset{\vee}{\wedge} (O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$.

Замечание. При произвольном α

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot x_n = \alpha \cdot O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Однако в общем случае

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha_n x \neq \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right) x.$$

Первое соотношение вытекает из равенства $|\alpha x - \alpha x_n| = |\alpha|\,|x - x_n|$. Что касается второго утверждения, то его справедливость устанавливается с помощью следующего контрпримера. Ввведем в двумерном векторном пространстве пар (ξ, η) вещественных чисел ξ и η отношение *лексикографического частичного упорядочения*, полагая $(\xi_1, \eta_1) \geqslant (\xi_2, \eta_2)$ в том и только в том случае, когда либо $\xi_1 > \xi_2$, либо $\xi_1 = \xi_2$ и $\eta_1 \geqslant \eta_2$. В результате, как нетрудно видеть, мы получаем векторную структуру. В этой структуре

$$n^{-1}(1, 0) \geqslant (0, 1) > 0 = (0, 0) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}(1, 0) \neq 0$. С помощью жорданова разложения $y = y^+ + y^-$ можно установить, что необходимым и достаточным условием справедливости равенства

$$O\text{-}\lim_{\alpha_n \to \alpha} \alpha_n x = \alpha x \tag{24}$$

является так называемая *аксиома Архимеда*

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} x = 0 \quad \text{для всех } x \geqslant 0. \tag{25}$$

Определение 3. Подмножество $\{x_\alpha\}$ векторной структуры X называется *ограниченным*, если существуют элементы y и z, такие, что $y \leqslant x_\alpha \leqslant z$ для всех x_α. Векторная структура X называется *полной*, если всякое ограниченное множество $\{x_\alpha\}$ из X обладает в X *верхней гранью* $\sup\limits_\alpha x_\alpha$ и *нижней гранью* $\inf\limits_\alpha x_\alpha$. Если для всякой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subseteq X$ в векторной структуре X существуют $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ и $\inf\limits_{n\geqslant 1} x_n$, то X называется *σ-полной* векторной структурой [1]). В σ-полной векторной структуре X определим *верхний* и *нижний пределы* ограниченной последовательности

$$O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_m \Big(\sup_{n\geqslant m} x_n\Big), \qquad O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_m \Big(\inf_{n\geqslant m} x_n\Big). \tag{26}$$

Предложение 7. Для того чтобы существовал предел $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, необходимо и достаточно, чтобы $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = O\text{-}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = x$.

---

[1]) Термины „полная" и „σ-полная векторная структура" обычно относят к случаям, когда произвольные множество $\{x_\alpha\} \subseteq X$ или соответственно последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ имеют в X верхние и нижние грани. Если таким свойством обладают ограниченные множества или последовательности, то применяют названия *условно полная* и *условно σ-полная векторная структура*. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $|x-x_n|\leqslant w_n$, $w_n\downarrow 0$. Тогда $x-w_n\leqslant x_n\leqslant x+w_n$, так что $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x-w_n)=x\leqslant O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n\leqslant O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x+w_n)=x$, откуда $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=x$. Аналогично устанавливается, что $O\text{-}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=x$.

Перейдем к доказательству достаточности. Введем обозначения $u_n=\sup\limits_{m\geqslant n}x_m$, $v_n=\inf\limits_{m\geqslant n}x_m$, $u_n-v_n=w_n$. По предположению $w_n\downarrow 0$. Далее $x_n\leqslant u_n=x+(u_n-x)\leqslant x+(u_n-v_n)=x+w_n$ и аналогично $x_n\geqslant x-w_n$, откуда видно, что $|x-x_n|\leqslant w_n$. Таким образом, $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

Предложение 8. Во всякой σ-полной векторной структуре X выражение αx непрерывно по α, x относительно предельного перехода O-lim.

Доказательство. Пусть $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$; тогда $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha||x-x_n|=0$. Поскольку $|\alpha x-\alpha_n x_n|\leqslant|\alpha x-\alpha x_n|+|\alpha x_n-\alpha_n x_n|=|\alpha|\cdot|x-x_n|+|\alpha-\alpha_n||x_n|$, то, полагая $\sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|=y$ и $\sup\limits_{m\geqslant n}|\alpha-\alpha_m|=\beta_n$, мы сводим задачу к доказательству того, что $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n y=0$. Предел $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n y=z$ существует, так как $y\geqslant 0$ и $\beta_n\downarrow 0$, и $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}2^{-1}\beta_n y=2^{-1}z$. Поэтому для любого n найдется такое n_0, что $\beta_{n_0}\leqslant 2^{-1}\beta_n$. Отсюда видно, что $z=2^{-1}z$, откуда $z=0$.

Предложение 9. Для того чтобы существовал предел $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ последовательности $\{x_n\}$ элементов σ-полной векторной структуры X, необходимо и достаточно, чтобы

$$O\text{-}\lim_{n,\,m\to\infty}|x_n-x_m|=0. \tag{27}$$

Доказательство. Необходимость условия (27) с очевидностью вытекает из неравенства $|x_n-x_m|\leqslant|x_n-x|+|x-x_m|$. Если положить $|x_n-x_m|=y_{nm}$, то $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n\leqslant x_m+O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_{nm}$, $O\text{-}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n\geqslant x_m-O\text{-}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_{nm}$. Таким образом,

$$0\leqslant O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n-O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\leqslant O\text{-}\lim_{m\to\infty}\left(O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_{nm}-O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_{nm}\right)=0.$$

Отсюда следует достаточность условия (27).

Предложение 10. Векторная структура X является σ-полной тогда и только тогда, когда всякая монотонная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ в X.

Доказательство. Мы должны доказать лишь достаточность условия теоремы. Пусть $\{z_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность из X. Положим $x_n = \sup\limits_{m\leqslant n} z_m$. Тогда по предположению в X существует $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n = z$ и $z = \sup\limits_{n\geqslant 1}\left(\sup\limits_{m\leqslant n} z_m\right)$. Точно так же в X существует

$$\inf_{n\geqslant 1} z_n = \inf_{n\geqslant 1}\left(\inf_{m\leqslant n} z_m\right).$$

3. *B*-структуры и *F*-структуры

Определение. Вещественное B-пространство (или F-пространство) называется *B-структурой* (соответственно *F-структурой*), если оно является векторной структурой и

$$\text{неравенство } |x|\leqslant|y| \text{ влечет за собой } \|x\|\leqslant\|y\|. \tag{1}$$

Примеры. Пространства $C(S)$ и $L^p(S)$ образуют B-структуры по естественному отношению частичного упорядочения, когда $x\leqslant y$, если $x(s)\leqslant y(s)$ при $s\in S$ для случая $C(S)$ и $x(s)\leqslant y(s)$ m-п. в. на S для пространства $L^p(S)$. В пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$, удовлетворяющем условию $m(S)<\infty$, отношение частичного упорядочения можно ввести так же, как и в $L^p(S)$; при этом $M(S, \mathfrak{B}, m)$ оказывается F-структурой. Если аналогичным способом упорядочить пространство $A(S, \mathfrak{B})$ и ввести в нем норму

$$\|x\| = |x|(S),$$

где $|x|(S)$ — полная вариация x на S, то получится B-структура $A(S, \mathfrak{B})$. В силу условия (1) и свойства $|x| = |(|x|)|$

$$\|x\| = \|(|x|)\|^{1)}. \tag{2}$$

В пространстве $A(S, \mathfrak{B})$, кроме того, выполняется условие

$$\text{если } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \text{ то } \|x+y\| = \|x\|+\|y\|. \tag{3}$$

---

[1]) Меры $x = x(B)$ $(B\in\mathfrak{B})$ частично упорядочиваются по правилу, указанному в примере гл. XII, § 2. Выражение $|x|$ в левой части равенства $|x| = |(|\bar{x}|)|$ обозначает абсолютную величину $x(B)$, т. е. полную вариацию x на множествах $B\in\mathfrak{B}$, рассматриваемую как мера, заданная на семействе $\mathfrak{B}$; величина $|(|x|)|$ — это абсолютная величина меры $|x|(B)$, т. е. полная вариация $|x|$ на множествах B как функция, заданная на $\mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*