Предложение 10. Векторная структура X является σ-полной тогда и только тогда, когда всякая монотонная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет $\sup\limits_{n \geqslant 1} x_n$ в X.

Доказательство. Мы должны доказать лишь достаточность условия теоремы. Пусть $\{z_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность из X. Положим $x_n = \sup\limits_{m \leqslant n} z_m$. Тогда по предположению в X существует $\sup\limits_{n \geqslant 1} x_n = z$ и $z = \sup\limits_{n \geqslant 1} \left(\sup\limits_{m \leqslant n} z_m \right)$. Точно так же в X существует

$$\inf_{n \geqslant 1} z_n = \inf_{n \geqslant 1} \left(\inf_{m \leqslant n} z_m \right).$$

3. *B-структуры и F-структуры*

Определение. Вещественное B-пространство (или F-пространство) называется *B-структурой* (соответственно *F-структурой*), если оно является векторной структурой и

$$\text{неравенство } |x| \leqslant |y| \text{ влечет за собой } \|x\| \leqslant \|y\|. \tag{1}$$

Примеры. Пространства $C(S)$ и $L^p(S)$ образуют B-структуры по естественному отношению частичного упорядочения, когда $x \leqslant y$, если $x(s) \leqslant y(s)$ при $s \in S$ для случая $C(S)$ и $x(s) \leqslant y(s)$ m-п. в. на S для пространства $L^p(S)$. В пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$, удовлетворяющем условию $m(S) < \infty$, отношение частичного упорядочения можно ввести так же, как и в $L^p(S)$; при этом $M(S, \mathfrak{B}, m)$ оказывается F-структурой. Если аналогичным способом упорядочить пространство $A(S, \mathfrak{B})$ и ввести в нем норму

$$\|x\| = |x|(S),$$

где $|x|(S)$ — полная вариация x на S, то получится B-структура $A(S, \mathfrak{B})$. В силу условия (1) и свойства $|x| = |(|x|)|$

$$\|x\| = \|(|x|)\|^{1)}. \tag{2}$$

В пространстве $A(S, \mathfrak{B})$, кроме того, выполняется условие

$$\text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \text{ то } \|x+y\| = \|x\| + \|y\|. \tag{3}$$

---

[1]) Меры $x = x(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ частично упорядочиваются по правилу, указанному в примере гл. XII, § 2. Выражение $|x|$ в левой части равенства $|x| = |(|x|)|$ обозначает абсолютную величину $x(B)$, т. е. полную вариацию x на множествах $B \in \mathfrak{B}$, рассматриваемую как мера, заданная на семействе $\mathfrak{B}$; величина $|(|x|)|$ — это абсолютная величина меры $|x|(B)$, т. е. полная вариация $|x|$ на множествах B как функция, заданная на $\mathfrak{B}$. —*Прим. перев.*

Какутани называет B-структуру, обладающую свойством (3), *абстрактным L^1-пространством*. Из (3) следует, что

$$\text{если } |x| < |y|, \quad \text{то } \|x\| < \|y\|. \tag{4}$$

Норма в векторной структуре $A(S, \mathfrak{B})$ оказывается непрерывной по отношению к предельному переходу O-lim, т. е.

$$\text{если } O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{то } \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|. \tag{5}$$

В самом деле, в $A(S, \mathfrak{B})$ условие $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ эквивалентно существованию последовательности $y_n \in A(S, \mathfrak{B})$, такой, что $y_n(S) \downarrow 0$ и $|x - x_n|(S) \leqslant y_n(S)$. Нетрудно заметить также, что пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ как векторная структура удовлетворяет условиям (4) и (5).

Предложение 1. Всякая σ-полная F-структура X, удовлетворяющая требованиям (4) и (5), является полной. В частности, $A(S, \mathfrak{B})$ и $M(S, \mathfrak{B}, m)$ — полные векторные структуры.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\} \subseteq X$ — ограниченное множество. Можно, очевидно, допустить, что $0 \leqslant x_\alpha \leqslant x$ для всех α. Покажем, что $\sup\limits_\alpha x_\alpha$ существует. Рассмотрим совокупность $\{z_\beta\}$ всех элементов z_β вида $z_\beta = \bigvee\limits_{j=1}^{n} x_{\alpha_j}$, т. е. множество всех верхних граней всевозможных конечных подмножеств из $\{x_\alpha\}$. Положим $\gamma = \sup\limits_\beta \|z_\beta\|$. Тогда найдется такая последовательность $\{z_{\beta_j}\}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|z_{\beta_j}\| = \gamma$. Положим $z_n = \sup\limits_{j\leqslant n} z_{\beta_j}$; тогда предел $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ существует и из определения величины γ и условия (5) следует, что $\|w\| = \gamma$. Покажем теперь, что $w = \sup\limits_\alpha x_\alpha$. Допустим, что $x_\alpha \vee w > w$ при некотором x_α. Тогда, согласно (4), $\|x_\alpha \vee w\| > \|w\| = \gamma$. Но так как $x_\alpha \vee w = O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_\alpha \vee z_n)$, $x_\alpha \vee z_n \in \{z_\beta\}$, то ввиду (5) имеет место равенство $\|x_\alpha \vee w\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_\alpha \vee z_n\| \leqslant \gamma$, что противоречит сделанным допущениям. Следовательно, $w \geqslant x_\alpha$ для всех x_α. Предположим, что для некоторого элемента u при всех α выполняется условие $x_\alpha \leqslant u$. Допустим, что $w \wedge u < w$. Тогда вследствие (4) $\|w \wedge u\| < \gamma$, вопреки тому, что $w \wedge u \geqslant z_\beta$ для всех z_β. Таким образом, $w = \sup\limits_\alpha x_\alpha$.

Замечание. В векторной структуре $C(S)$ из условия $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ не следует, вообще говоря, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. В $M(S, \mathfrak{B}, m)$ соотношение $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ не гарантирует равенства $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Последнее подтверждается следующим примером. Пусть $x_1(s), x_2(s), \ldots$ —

характеристические функции отрезков

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right], \left[0, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right], \ldots,$$

принадлежащих отрезку [0, 1]. Последовательность $\{x_n(s)\} \subseteq M([0, 1])$ сходится по мере к нулю, но она не сходится к нулю почти всюду, т. е. $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, но $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Предложение 2. Пусть X — произвольная F-структура. Допустим, что последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ удовлетворяет условию $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ **-сходится к x относительно равномерно*[1]), т. е. из любой подпоследовательности $\{y_n\} \subseteq \{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{y_{n(k)}\} \subseteq \{y_n\}$ и такой элемент $z \in X$, что

$$|y_{n(k)} - x| \leqslant k^{-1}z \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Обратно, если последовательность $\{x_n\}$ **-сходится относительно равномерно к x*, то $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно рассматривать лишь случай $x = 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$, то найдется такая последовательность $\{n(k)\}$ положительных целых чисел, что $\|ky_{n(k)}\| \leqslant k^{-2}$. Тогда, полагая $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |ky_{n(k)}|$, мы убеждаемся в справедливости условия (6). Обратно, допустим, что (6) выполняется для $x = 0$. Тогда $|y_{n(k)}| \leqslant k^{-1}z$, и поэтому $\|y_{n(k)}\| \leqslant \|k^{-1}z\|$. Следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)} = 0$. Последнее означает, что не может существовать подпоследовательность $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| > 0$.

Замечание. Предложение 2, сформулированное и доказанное выше в абстрактной форме, в применении к F-структуре $M(S, \mathfrak{B}, m)$ выражает, очевидно, тот факт, что при условии $m(S) < \infty$ всякая сходящаяся по мере последовательность из $M(S, \mathfrak{B}, m)$ содержит некоторую подпоследовательность, сходящуюся m-п. в.

---

[1]) Если из всякой подпоследовательности $\{y_n\} \subseteq \{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z_n\} \subseteq \{y_n\}$, которая сходится (в том или ином смысле) к x, то говорят, что $\{x_n\}$ **-сходится* (в соответствующем смысле) *к x*. Если для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|x_n - x| \leqslant \varepsilon u$ $(n \geqslant N(\varepsilon))$, где u — фиксированный элемент из X, то говорят, что $\{x_n\}$ *сходится к x относительно равномерно.* Тип сходимости, определяемый условием (6), представляет собой комбинацию указанных видов сходимости, откуда и происходит его название. — *Прим. перев.*