4. Теорема Банаха о сходимости

Теорема Банаха относится к вопросу о сходимости почти всюду последовательности линейных операторов с областями значений в пространстве измеримых функций. См. Банах [2]. Предлагаемая ниже абстрактная формулировка этой теоремы, выраженная в терминах теории векторных структур, принадлежит Иосида [15].

Теорема. Пусть X — вещественное B-пространство с нормой $\|\ \|$, и пусть Y есть σ-полная F-структура с квазинормой $\|\ \|_1$. Допустим, что

$$\text{из равенства } O\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y \text{ следует равенство } \lim_{n\to\infty} \|y_n\|_1 = \|y\|_1. \tag{1}$$

Пусть $\{T_n\}$ — некоторая последовательность ограниченных линейных операторов, принадлежащих $L(X, Y)$. Предположим, что

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} |T_n x| \text{ существует для точек } x \in X, \text{ образующих множество } G \text{ второй категории.} \tag{2}$$

Тогда для всякого $x \in X$ существуют оба предела $O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x$ и $O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x$ и равенство

$$\tilde{T}x = \left(O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x\right) - \left(O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x\right) \tag{3}$$

определяет (не обязательно линейный) непрерывный оператор $\tilde{T}$, действующий из X в Y.

Замечание. Пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ при условии $m(S) < \infty$ удовлетворяет требованию (1), если определить в нем квазинорму $\|y\|_1$ формулой $\|y\|_1 = \int\limits_S |y(s)|(1 + |y(s)|)^{-1} m(ds)$ и считать, что $y_1 \leqslant y_2$ тогда и только тогда, когда $y_1(s) \leqslant y_2(s)$ m-п. в. При таком же способе частичного упорядочения пространство $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$, где $m(S) \leqslant \infty$, тоже удовлетворяет условию (1).

Доказательство теоремы. Положим $T_n x = y_n$, $y'_n = \sup\limits_{n \geqslant m} |y_m|$, $y' = \sup\limits_{n \geqslant 1} |y_n|$ и рассмотрим операторы $V_n x = y'_n$ и $Vx = y'$, определенные по крайней мере для всех $x \in G$ и отображающие G в Y. Из равенства (23), § 2, следует, что каждый из операторов V_n сильно непрерывен вместе с T_k. Согласно (1), $\lim\limits_{n\to\infty} \|V_n x - Vx\|_1 = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \|k^{-1}V_n x\| = \|k^{-1}Vx\|$; кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty} \|k^{-1}Vx\|_1 = 0$, так как выражение αy непрерывно в F-пространстве Y по α, y.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$G \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, \quad \text{где } G_k = \left\{ x \in X;\ \sup_{n \geqslant 1} \| k^{-1} V_n x \|_1 \leqslant \varepsilon \right\}. \tag{4}$$

Вследствие сильной непрерывности V_n каждое из множеств G_k сильно замкнуто в пространстве X. По предположению G есть множество второй категории, поэтому некоторое множество вида G_{k_0} должно содержать шар пространства X. Таким образом, найдутся элемент $x_0 \in X$ и число $\delta > 0$, такие, что при $\| x_0 - x \| \leqslant \delta$ выполняется неравенство $\sup\limits_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n x \|_1 \leqslant \varepsilon$. Полагая $z = x_0 - x$, мы видим, что

$$\sup_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n z \|_1 \leqslant \sup_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n x_0 \|_1 + \sup_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n x \|_1 \leqslant 2\varepsilon,$$

и поскольку $V_n (k_0^{-1} z) = k_0^{-1} V_n z$, отсюда вытекает, что

$$\sup_{n \geqslant 1} \| V_n z \|_1 \leqslant 2\varepsilon \text{ при } \| z \| \leqslant \delta / k_0.$$

Таким образом, $s\text{-}\lim\limits_{\| z \| \to 0} V_n \cdot z = 0$ равномерно относительно n.

Множество G плотно в X, поэтому выражение $V \cdot x$ фактически определено для всех $x \in X$ и сильно непрерывно в точке $x = 0$, причем $V \cdot 0 = 0$. Следовательно, ввиду того что

$$| \tilde{T} \cdot x | \leqslant 2V \cdot x \quad \text{и} \quad \| \tilde{T} x_1 - \tilde{T} x_2 \|_1 \leqslant \| \tilde{T} (x_1 - x_2) \|_1,$$

выражение $\tilde{T} \cdot x$ сильно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Следствие. Если выполняется условие (1), то множество $G = \left\{ x \in X;\ O\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_n x \text{ существует} \right\}$ либо совпадает со всем пространством X, либо является множеством первой категории.

Доказательство. Предположим, что G — множество второй категории. Тогда, согласно доказанной теореме, оператор $\tilde{T}$ сильно непрерывен и отображает X в Y. Поэтому множество $G = \{ x \in X;\ \tilde{T} x = 0 \}$ сильно замкнуто в X. А так как, кроме того, G является линейным подпространством в X, то $G = X$, ибо в противном случае G не было бы плотным в X.

5. *Представление векторной структуры при помощи функций точки*

Предположим, что векторная структура X содержит *„единицу“* I, обладающую такими свойствами:

$$I > 0 \text{ и для любого } f \in X \text{ существует } \alpha > 0, \text{ такое, что } -\alpha I \leqslant f \leqslant \alpha I. \tag{1}$$