Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$G \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, \quad \text{где } G_k = \left\{ x \in X;\ \sup_{n \geq 1} \| k^{-1} V_n x \|_1 \leqslant \varepsilon \right\}. \tag{4}$$

Вследствие сильной непрерывности V_n каждое из множеств G_k сильно замкнуто в пространстве X. По предположению G есть множество второй категории, поэтому некоторое множество вида G_{k_0} должно содержать шар пространства X. Таким образом, найдутся элемент $x_0 \in X$ и число $\delta > 0$, такие, что при $\| x_0 - x \| \leqslant \delta$ выполняется неравенство $\sup_{n \geq 1} \| k_0^{-1} V_n x \|_1 \leqslant \varepsilon$. Полагая $z = x_0 - x$, мы видим, что

$$\sup_{n \geq 1} \| k_0^{-1} V_n z \|_1 \leqslant \sup_{n \geq 1} \| k_0^{-1} V_n x_0 \|_1 + \sup_{n \geq 1} \| k_0^{-1} V_n x \|_1 \leqslant 2\varepsilon,$$

и поскольку $V_n (k_0^{-1} z) = k_0^{-1} V_n z$, отсюда вытекает, что

$$\sup_{n \geq 1} \| V_n z \|_1 \leqslant 2\varepsilon \quad \text{при } \| z \| \leqslant \delta / k_0.$$

Таким образом, $s\text{-}\lim_{\|z\| \to 0} V_n \cdot z = 0$ равномерно относительно n.

Множество G плотно в X, поэтому выражение $V \cdot x$ фактически определено для всех $x \in X$ и сильно непрерывно в точке $x = 0$, причем $V \cdot 0 = 0$. Следовательно, ввиду того что

$$| \tilde{T} \cdot x | \leqslant 2V \cdot x \quad \text{и} \quad \| \tilde{T} x_1 - \tilde{T} x_2 \|_1 \leqslant \| \tilde{T} (x_1 - x_2) \|_1,$$

выражение $\tilde{T} \cdot x$ сильно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Следствие. Если выполняется условие (1), то множество $G = \left\{ x \in X;\ O\text{-}\lim_{n \to \infty} T_n x \text{ существует} \right\}$ либо совпадает со всем пространством X, либо является множеством первой категории.

Доказательство. Предположим, что G — множество второй категории. Тогда, согласно доказанной теореме, оператор $\tilde{T}$ сильно непрерывен и отображает X в Y. Поэтому множество $G = \{ x \in X;\ \tilde{T} x = 0 \}$ сильно замкнуто в X. А так как, кроме того, G является линейным подпространством в X, то $G = X$, ибо в противном случае G не было бы плотным в X.

5. Представление векторной структуры при помощи функций точки

Предположим, что векторная структура X содержит *„единицу“* I, обладающую такими свойствами:

$$I > 0 \text{ и для любого } f \in X \text{ существует } \alpha > 0, \text{ такое, что } -\alpha I \leqslant f \leqslant \alpha I. \tag{1}$$

Для векторной структуры X такого типа имеет место представление, аналогичное представлению нормированного кольца с помощью функций, заданных на максимальных идеалах.

Назовем элемент $f \in X$ *нильпотентным*, если $n|f| \leqslant I$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Совокупность R всех нильпотентных элементов $f \in X$ называется *радикалом* векторной структуры X. Из условия (20) § 2 гл. XII видно, что радикал R представляет собой линейное подпространство в X. Кроме того, радикал R является *идеалом* в X в том смысле, что

$$\text{если } f \in R \quad \text{и} \quad |g| \leqslant |f|, \quad \text{то } g \in R. \tag{2}$$

Лемма. Рассмотрим две векторные структуры X_1 и X_2. Линейный оператор T, отображающий X_1 на X_2, называется *гомоморфизмом структур*, если

$$T(x \underset{\wedge}{\vee} y) = (Tx) \underset{\wedge}{\vee} (Ty). \tag{3}$$

Оператор T является гомоморфизмом структур тогда и только тогда, когда множество $N = \{x \in X_1;\ Tx = 0\}$ образует идеал в X_1.

Доказательство. Пусть T — гомоморфизм структур. Пусть $x \in N$ и $|y| \leqslant |x|$. Тогда, поскольку $T(|x|) = T(x \vee -x) = (Tx) \vee \vee (T(-x)) = 0$, мы находим, что $0 \leqslant Ty^+ = T(y^+ \wedge |x|) = = Ty^+ \wedge T|x| = 0$, и поэтому $y^+ \in N$. Аналогично устанавливается тот факт, что $y^- \in N$, и, таким образом, $y = y^+ + y^- \in N$.

Предположим теперь, что линейное подпространство $N = \{x \in X_1;\ Tx = 0\}$ является идеалом в X_1. В этом случае линейное пространство X_2 изоморфно факторпространству X_1/N. Мы должны показать, что $\overline{(x \underset{\wedge}{\vee} y)} = \bar{x} \underset{\wedge}{\vee} \bar{y}$, где через $\bar{x}$ обозначен класс элементов пространства X_1, эквивалентных по подпространству N, содержащий x. Для этого заметим, что если $\bar{y} = \bar{z}$, то $y - z \in N$, и тогда, согласно условию (23), § 2 этой главы,

$$|x \underset{\wedge}{\vee} y - x \underset{\wedge}{\vee} z| \leqslant |y - z| \in N,$$

так что класс вычетов $\overline{(x \underset{\wedge}{\vee} y)}$ определяется независимо от выбора элементов x и y соответственно из классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Замечание. Утверждение доказанной леммы можно сформулировать следующим эквивалентным способом: пусть N — некоторое линейное подпространство векторной структуры X. Эквивалентность $a \equiv b \pmod N$ произвольных элементов a, b как векторов линейного пространства влечет за собой их эквивалентность $(\operatorname{mod} N)$ как элементов векторной структуры тогда и только тогда, когда N является идеалом в X. Иными словами, для произвольных элементов векторной структуры требование

$$\text{из условия } a \equiv b, \ a' \equiv b' (\operatorname{mod} N) \text{ следует,}$$
$$\text{что } a \underset{\wedge}{\vee} b \equiv a' \underset{\wedge}{\vee} b' (\operatorname{mod} N),$$

выполняется в том и только в том случае, когда N — идеал в X.

Идеал N назовем *нетривиальным*, если $N \neq \{0\}$, X. Нетривиальный идеал N называется *максимальным*, если он не содержится как собственное подмножество ни в каком другом идеале, отличном от X. Совокупность всех максимальных идеалов N векторной структуры X обозначим через $\mathfrak{M}$. Векторную структуру, не содержащую нетривиальных идеалов, назовем *простой*. Векторная структура X/N классов элементов из X, эквивалентных по произвольному идеалу $N \in \mathfrak{M}$, является простой. Далее будет показано, что *всякая простая векторная структура с единицей линейно-структурно изоморфна векторной структуре вещественных чисел, причем неотрицательным элементам соответствуют неотрицательные числа, а единице I — число* 1. Векторная структура X линейно-структурно гомоморфна X/N $(N \in \mathfrak{M})$; таким образом каждому элементу $f \in X$ можно поставить в соответствие вещественное число, которое мы обозначим через $f(N)$.

После этих предварительных рассуждений мы можем сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. Радикал R совпадает с идеалом $\bigcap\limits_{N \in \mathfrak{M}} N$.

Доказательство. *Первый этап.* Пусть X — простая векторная структура с единицей I. Тогда $X = \{\alpha I;\ -\infty < \alpha < \infty\}$.

Доказательство. Структура X не может содержать нильпотентных элементов $f \neq 0$, так как в противном случае в X содержался бы нетривиальный идеал $N = \{g;\ |g| \leqslant \eta |f|$ при некотором $\eta < \infty\}$. Поэтому, согласно условию (1), для X выполняется *аксиома Архимеда*

$$O\text{-}\lim_{n \to \infty} n^{-1} |x| = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{4}$$

Предположим, что существует элемент $f_0 \in X$, такой, что $f_0 \neq \gamma I$ при любом вещественном γ. Положим

$$\alpha = \inf_{f_0 \leqslant \alpha' I} \alpha', \qquad \beta = \sup_{\beta' I \leqslant f_0} \beta'.$$

Тогда из (4) вытекает, что $\beta I \leqslant f_0 \leqslant \alpha I$ и $\beta < \alpha$. Следовательно, $(f_0 - \delta I)^+ \neq 0$, $(f_0 - \delta I)^- \neq 0$ при всех $\beta < \delta < \alpha$. Поскольку $x^+ \wedge \wedge (-x^-) = 0$, множество $N_0 = \{g;\ |g| \leqslant \eta (f_0 - \delta I)^+$ при некотором $\eta < \infty\}$ образует нетривиальный идеал, что противоречит сделанным допущениям.

Второй этап. Для всякого нетривиального идеала N_0 найдется максимальный идеал N_1, содержащий N_0.

Доказательство. Обозначим через $\{N_0\}$ совокупность всех нетривиальных идеалов, содержащих N_0. Введем в множестве $\{N_0\}$ отношение порядка, полагая $N_{\alpha_1} \leqslant N_{\alpha_2}$ в том случае, когда N_{α_1} является подмножеством в N_{α_2}. Пусть $\{N_\alpha\}$ — произвольное линейно упорядоченное подмножество из $\{N_0\}$. Положим $N_\beta = \bigcup\limits_{N_\alpha \in \{N_\alpha\}} N_\alpha$.

Покажем, что N_β служит мажорантой для $\{N_\alpha\}$. Действительно, если $x, y \in N_\beta$, то существуют идеалы N_{α_1} и N_{α_2}, такие, что $x \in N_{\alpha_1}$ и $y \in N_{\alpha_2}$. Так как подмножество $\{N_\alpha\}$ линейно упорядочено, то $N_{\alpha_1} \subseteq N_{\alpha_2}$ (или $N_{\alpha_1} \supseteq N_{\alpha_2}$), и элементы x и y оба принадлежат N_{α_2} (соответственно N_{α_1}). Это показывает, что $(\gamma x + \delta y) \in N_{\alpha_2} \subseteq N_\beta$ и что из условия $|z| \leqslant |x|$ вытекает включение $z \in N_{\alpha_1} \subseteq N_\beta$. Единица I не входит ни в один идеал N_α и поэтому не содержится в N_β. Таким образом, N_β представляет собой нетривиальный идеал, содержащий каждый из идеалов N_α, т. е. является мажорантой для $\{N_\alpha\}$. Отсюда на основании леммы Цорна мы заключаем, что найдется по крайней мере один максимальный идеал, содержащий N_0.

Третий этап. Покажем, что $R \subseteq \bigcap\limits_{N \in \mathfrak{M}} N$. Пусть $f > 0$ и $nf \leqslant I$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $nf(N) \leqslant I(N) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для любого $N \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $f(N) = 0$, т. е. $f \in N$.

Четвертый этап. Убедимся в том, что $R \supseteq \bigcap\limits_{N \in \mathfrak{M}} N$. Пусть $f > 0$ не является нильпотентным элементом. Мы должны показать, что найдется идеал $N \in \mathfrak{M}$, не содержащий f. Это доказывается следующим образом.

Так как $f > 0$ — не нильпотентный элемент, найдется такое целое число n, что $nf \not\leqslant I$. Мы можем предположить, что $nf \not\geqslant I$, ибо в противном случае $f \notin N$ при любом $N \in \mathfrak{M}$, и наше утверждение оказывается тривиальным. Допустим, что $p = I - (n \cdot f) \wedge I > 0$. В этом случае неравенство $m \cdot p \geqslant I$ не выполняется ни для какого положительного целого m. Действительно, в противном случае $m^{-1} I \leqslant I - (n \cdot f) \wedge I$ и, следовательно,

$$(n \cdot f) \wedge I = (n \cdot f) \wedge (1 - m^{-1}) I.$$

Тогда, согласно условию (6) § 2 гл. XII,

$$(n \cdot f - (1 - m^{-1}) I) \wedge m^{-1} I = (n \cdot f - (1 - m^{-1}) I) \wedge 0 \leqslant 0,$$

откуда в силу дистрибутивности векторной структуры вытекает соотношение

$$0 = \{(n \cdot f - (1 - m^{-1}) I) \wedge m^{-1} I\} \vee 0 = (n \cdot f - (1 - m^{-1}) I)^{+} \wedge m^{-1} I.$$

т. е. $(n \cdot f - (1 - m^{-1})I)^+ \wedge I = 0$. Положим $b = (n \cdot f - (1 - m^{-1}I)^+$ и допустим, что $b > 0$. По условию (1) найдется $\alpha > 1$, при котором $b < \alpha I$. Тогда $0 < b = b \wedge \alpha I$, и поэтому $0 < (\alpha^{-1}b) \wedge I \leqslant b \wedge I$, что противоречит равенству $b \wedge I = 0$. Таким образом, $b = 0$, т. е. $n \cdot f \leqslant (1 - m^{-1})I$. Последнее же противоречит тому, что $n \cdot f \nleqslant I$. Из приведенных рассуждений видно, что множество $N_0 = \{g;\ |g| \leqslant \eta |p|$ при некотором $\eta < \infty\}$ образует нетривиальный идеал. Как установлено на втором этапе доказательства, N_0 содержится по крайней мере в одном максимальном идеале N. Но тогда $0 = p(N) = 1 - (n \cdot f(N)) \wedge 1$, откуда видно, что $f(N) > 0$, т. е. $f \notin N$. Итак, теорема 1 доказана.

Векторная структура $\overline{X} = X/R$, так же как и X, представляет собой векторную структуру с единицей $\overline{I}$. Идеал $\bigcap\limits_{\overline{N}} \overline{N}$, пересечение всех максимальных идеалов $\overline{N}$ векторной структуры $\overline{X}$, является, согласно теореме 1, нулевым и $\overline{X}$ не содержит отличных от нуля нильпотентных элементов. Следовательно, для $\overline{X}$ выполняется аксиома Архимеда

$$O\text{-}\lim_{n \uparrow \infty} n^{-1} |\overline{f}| = 0 \quad \text{для всех} \quad \overline{f} \in \overline{X}. \tag{5}$$

Пусть $\overline{N}$ — произвольный максимальный идеал в $\overline{X}$. Тогда факторпространство $\overline{X}/\overline{N}$ образует простую векторную структуру и, как было показано на первом этапе доказательства теоремы 1, структура $\overline{X}/\overline{N}$ линейно-структурно изоморфна векторной структуре вещественных чисел, причем неотрицательным элементам соответствуют неотрицательные числа, а единице — число 1. Вещественное число, отвечающее элементу $\overline{f}$ при гомоморфизме $\overline{X} \to \overline{X}/\overline{N}$, обозначим через $\overline{f}(\overline{N})$. Через $\overline{\mathfrak{M}}$ обозначим множество всех максимальных идеалов $\overline{X}$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Соответствие $\overline{f} \to \overline{f}(\overline{N})$ определяет линейно-структурно изоморфное отображение структуры $\overline{X}$ на векторную структуру $F(\overline{\mathfrak{M}})$ ограниченных вещественных функций на $\overline{\mathfrak{M}}$, удовлетворяющее условиям (1°) $|\overline{f}| \to |\overline{f}(\overline{N})|$; (2°) $\overline{I}(\overline{N}) \equiv 1$ на $\overline{\mathfrak{M}}$; (3°) $F(\overline{\mathfrak{M}})$ разделяет точки множества $\overline{\mathfrak{M}}$, т. е.

для любых двух различных точек $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ множества $\overline{\mathfrak{M}}$

существует по крайней мере один элемент $\overline{f} \in \overline{X}$,

$$\text{такой, что } \overline{f}(\overline{N}_1) \neq \overline{f}(\overline{N}_2). \tag{6}$$

Замечание. Введем топологию в множестве $\overline{\mathfrak{M}}$, принимая множества вида

$$\{\overline{N}\in\overline{\mathfrak{M}};\ |\overline{f}_i(\overline{N})-\overline{f}_i(\overline{N}_0)|<\varepsilon_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$\text{где}\quad -\overline{I}\leqslant\overline{f}\leqslant\overline{I}\ \text{для всех}\ i\}$$

за окрестности точки $\overline{N}_0$. Пространство $\overline{\mathfrak{M}}$ оказывается в этом случае бикомпактным, так как его можно отождествить с некоторым замкнутым множеством, принадлежащим топологическому произведению (той же мощности, что и множество всех элементов $\overline{f}\in\overline{X}$, удовлетворяющих неравенствам $-\overline{I}\leqslant\overline{f}\leqslant\overline{I}$) замкнутых интервалов $[-1, 1]$. Доказательство этого утверждения сходно с доказательством аналогичных фактов для множества всех максимальных идеалов нормированного кольца, приведенным в гл. XI, § 2. Более того, каждая из функций $\overline{f}(\overline{N})\in F(\overline{\mathfrak{M}})$ непрерывна на бикомпактном пространстве $\overline{\mathfrak{M}}$, топологизированном таким способом. Отсюда на основании теоремы Какутани — Крейна (§ 2 введения) мы можем заключить, что множество $F(\overline{\mathfrak{M}})$ плотно в B-пространстве $C(\overline{\mathfrak{M}})$. Приведенные в этом параграфе две теоремы заимствованы из работы Иосида — Фукамия [16]. См. также Какутани [4] и М. Г. Крейн — С. Г. Крейн [2].

6. Представление векторной структуры при помощи функций множества

Обозначим через X некоторую σ-полную векторную структуру. Выберем произвольный положительный элемент x из X и назовем его *„единицей"* в X. Мы будем обозначать выбранную „единицу" символом 1, и в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, писать α вместо $\alpha\cdot 1$. Неотрицательный элемент $e\in X$ будем называть „квазиединицей", если $e\wedge(1-e)=0$. Конечные линейные комбинации вида $\sum\limits_i\alpha_i e_i$ квазиединиц e_i мы будем называть „конечнозначными" элементами, а всякий элемент $y\in X$, который выражается как O-lim последовательности конечнозначных элементов, назовем „абсолютно непрерывным" (по отношению к единице 1). Всякий элемент $z\in X$, для которого $|z|\wedge 1=0$, будет называться „сингулярным" (по отношению к единице 1).

Приведем абстрактную формулировку известной в теории интегрирования теоремы Радона — Никодима.

Теорема. Всякий элемент из X может быть единственным образом представлен в виде суммы абсолютно непрерывного и сингулярного элементов.

Доказательство. *Первый этап.* Если $f>0$ и $f\wedge 1\neq 0$, то найдутся положительное число α и квазиединица $e_\alpha\neq 0$, такие, что