Замечание. Введем топологию в множестве $\overline{\mathfrak{M}}$, принимая множества вида

$$\{\overline{N} \in \overline{\mathfrak{M}};\ |\overline{f}_i(\overline{N}) - \overline{f}_i(\overline{N}_0)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{где } -\overline{I} \leqslant \overline{f} \leqslant \overline{I} \text{ для всех } i\}$$

за окрестности точки $\overline{N}_0$. Пространство $\overline{\mathfrak{M}}$ оказывается в этом случае бикомпактным, так как его можно отождествить с некоторым замкнутым множеством, принадлежащим топологическому произведению (той же мощности, что и множество всех элементов $\overline{f} \in \overline{X}$, удовлетворяющих неравенствам $-\overline{I} \leqslant \overline{f} \leqslant \overline{I}$) замкнутых интервалов $[-1, 1]$. Доказательство этого утверждения сходно с доказательством аналогичных фактов для множества всех максимальных идеалов нормированного кольца, приведенным в гл. XI, § 2. Более того, каждая из функций $\overline{f}(\overline{N}) \in F(\overline{\mathfrak{M}})$ непрерывна на бикомпактном пространстве $\overline{\mathfrak{M}}$, топологизированном таким способом. Отсюда на основании теоремы Какутани — Крейна (§ 2 введения) мы можем заключить, что множество $F(\overline{\mathfrak{M}})$ плотно в B-пространстве $C(\overline{\mathfrak{M}})$. Приведенные в этом параграфе две теоремы заимствованы из работы Иосида — Фукамия [16]. См. также Какутани [4] и М. Г. Крейн — С. Г. Крейн [2].

6. Представление векторной структуры при помощи функций множества

Обозначим через X некоторую σ-полную векторную структуру. Выберем произвольный положительный элемент x из X и назовем его *„единицей“* в X. Мы будем обозначать выбранную „единицу“ символом 1, и в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, писать α вместо $\alpha \cdot 1$. Неотрицательный элемент $e \in X$ будем называть „квазиединицей“, если $e \wedge (1 - e) = 0$. Конечные линейные комбинации вида $\sum\limits_i \alpha_i e_i$ квазиединиц e_i мы будем называть „конечнозначными“ элементами, а всякий элемент $y \in X$, который выражается как O-lim последовательности конечнозначных элементов, назовем „абсолютно непрерывным“ (по отношению к единице 1). Всякий элемент $z \in X$, для которого $|z| \wedge 1 = 0$, будет называться „сингулярным“ (по отношению к единице 1).

Приведем абстрактную формулировку известной в теории интегрирования теоремы Радона — Никодима.

Теорема. Всякий элемент из X может быть единственным образом представлен в виде суммы абсолютно непрерывного и сингулярного элементов.

Доказательство. *Первый этап.* Если $f > 0$ и $f \wedge 1 \neq 0$, то найдутся положительное число α и квазиединица $e_\alpha \neq 0$, такие, что

$f \geqslant \alpha e_\alpha$. Например, мы можем положить

$$e_\alpha = \bigvee_{n \geqslant 1} \{n(\alpha^{-1}f - \alpha^{-1}f \wedge 1) \wedge 1\}. \qquad (1)$$

Доказательство. Положим $y_\alpha = \alpha^{-1}f - \alpha^{-1}f \wedge 1$. Тогда

$$2e_\alpha \wedge 1 = \left\{ \bigvee_{n \geqslant 1} (2ny_\alpha \wedge 2) \right\} \wedge 1 = e_\alpha,$$

так что e_α — квазиединица. Неравенство $f \geqslant \alpha e_\alpha$ выводится из соотношения

$$ny_\alpha \wedge 1 = n\alpha^{-1}f \wedge [1 + n(\alpha^{-1}f \wedge 1)] - n(\alpha^{-1}f \wedge 1) \leqslant$$
$$\leqslant (n+1)\alpha^{-1}f \wedge (n+1) - n(\alpha^{-1}f \wedge 1) \leqslant \alpha^{-1}f \wedge 1 \leqslant \alpha^{-1}f.$$

Если мы сможем показать, что $y_\alpha \wedge 1 > 0$ для некоторого $\alpha > 0$, то $e_\alpha > 0$ при таком α. Предположим, что такого положительного значения α не существует. Тогда при любом α из интервала $0 < \alpha < 1$

$$\alpha^{-1}(\alpha^{-1}f - \alpha^{-1}f \wedge 1) \wedge \alpha^{-1} = 0.$$

Таким образом, $(f - f \wedge \alpha) \wedge 1 = 0$, и, полагая $\alpha \downarrow 0$, мы находим, что $f \wedge 1 = 0$, а это противоречит предположению $f \wedge 1 \neq 0$.

Второй этап. Пусть $f \geqslant 0$ и $f \geqslant \alpha e$, где $\alpha > 0$, а e — некоторая квазиединица. Тогда при $0 < \alpha' < \alpha$ мы имеем $e_{\alpha'} \geqslant e$ и $f \geqslant \alpha' e_{\alpha'}$, где $e_{\alpha'}$ определяется формулой (1).

Доказательство. Для упрощения выкладок мы, не ограничивая общности, можем положить $\alpha = 1$. При $0 < \delta < 1$

$$\frac{f}{1-\delta} + \frac{e}{1-\delta} \wedge 1 = \left(\frac{f}{1-\delta} + \frac{e}{1-\delta}\right) \wedge \left(1 + \frac{f}{1-\delta}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{f}{1-\delta} + \frac{e}{1-\delta}\right) \wedge \left(1 + \frac{e}{1-\delta}\right) = \frac{f}{1-\delta} \wedge 1 + \frac{e}{1-\delta}.$$

Поскольку e — квазиединица, мы имеем $2e \wedge 1 = e$, $e \wedge 1 = e$. Следовательно, $me \wedge 1 = e$ при $m \geqslant 1$. Так как $1 < (1-\delta)^{-1}$, мы получаем, что $(1-\delta)^{-1} e \wedge 1 = e$. Поэтому из приведенного выше неравенства следует, что

$$\frac{\delta}{1-\delta} e = \frac{e}{1-\delta} - \frac{e}{1-\delta} \wedge 1 \leqslant \frac{f}{1-\delta} - \frac{f}{1-\delta} \wedge 1 = y_{1-\delta},$$

откуда, согласно (1), $e \leqslant e_{1-\delta}$.

Третий этап. Совокупность всех квазиединиц образует *булеву алгебру*: если e_1 и e_2 — квазиединицы, то $e_1 \vee e_2$ и $e_1 \wedge e_2$ — тоже квазиединицы и, кроме того, $0 \leqslant e_i \leqslant 1$. Квазиединица $(1 - e)$ служит дополнением к e, а 0 и 1 являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами в множестве всех квазиединиц.

Доказательство. Условие $e \wedge (1-e)=0$ эквивалентно равенству $2e \wedge 1 = e$. Поэтому если e_1 и e_2 — квазиединицы, то

$$2(e_1 \wedge e_2) \wedge 1 = (2e_1 \wedge 1) \wedge (2e_2 \wedge 1) = e_1 \wedge e_2,$$
$$2(e_1 \vee e_2) \wedge 1 = (2e_1 \wedge 1) \vee (2e_2 \wedge 1) = e_1 \vee e_2,$$

так что $e_1 \wedge e_2$ и $e_1 \vee e_2$ также принадлежат множеству квазиединиц.

Четвертый этап. Пусть $f > 0$. Положим $\bar{f} = \sup \beta e_\beta$, где верхняя грань берется по всем положительным рациональным числам β. Как выяснено на третьем этапе доказательства, верхняя грань конечного множества элементов вида $\beta_i e_{\beta_i}$ представляет собой конечнозначный элемент. Следовательно, элемент $\bar{f}$ абсолютно непрерывен по отношению к единице 1. Покажем, что элемент $g = f - \bar{f}$ сингулярен по отношению к единице 1. Для этого допустим, что он не сингулярен. Тогда, как показано на первом этапе доказательства, найдутся положительное число α и квазиединица e, такие, что $g \geqslant \alpha e$. Поэтому $f \geqslant \alpha e$ и, как показано на втором этапе, существуют число α_1, $0 < \alpha_1 < \alpha$, и квазиединица $e_{\alpha_1} \geqslant e$, такие, что $f \geqslant \alpha_1 e_{\alpha_1}$. Можно считать, что число α_1 рационально. Тогда $\bar{f} \geqslant \alpha_1 e_{\alpha_1}$ и, следовательно, $f = \bar{f} + g \geqslant 2\alpha_1 e_{\alpha_1}$. Применяя снова результаты второго этапа доказательства, найдем число α_1' из промежутка $0 < \alpha_1' < \alpha_1$ и квазиединицу $e_{2\alpha_1'} \geqslant e_{\alpha_1}$, для которых $f \geqslant 2\alpha_1' e_{2\alpha_1'}$. Опять-таки можно допустить, что $2\alpha_1'$ рационально, и тогда $\bar{f} \geqslant 2\alpha_1' e_{2\alpha_1'}$. Отсюда следует, что $f = \bar{f} + g \geqslant 3\alpha_1' e$. Повторяя этот процесс, мы можем доказать, что для любого рационального числа α_n, удовлетворяющего неравенствам $0 < \alpha_n < \alpha$,

$$f \geqslant (n+1)\alpha_n e \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если взять $\alpha_n \geqslant \alpha/2$, то $(n+1)\alpha_n e \geqslant 2^{-1} n\alpha e$. Следовательно, $f \geqslant n\alpha e$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, где $\alpha > 0$, $e > 0$. Но последнее заключение приводит к противоречию, так как по предположению векторная структура X является σ-полной и в ней должна выполняться аксиома Архимеда.

Пятый этап. Напишем жорданово разложение $f = f^+ + f^-$ произвольного элемента $f \in X$. Применяя к каждому из элементов f^+ и f^- результаты четвертого этапа, мы находим, что элемент f разлагается в сумму абсолютно непрерывного и сингулярного элементов. Единственность такого разложения будет установлена, если мы покажем, что всякий элемент $h \in X$, являющийся одновременно сингулярным и абсолютно непрерывным, равен нулю. Но если элемент h абсолютно непрерывен, то $h = O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} h_n$, где h_n — конечнозначные элементы, а для каждого конечнозначного элемента h_n существует такое положительное число a_n, что $|h_n| \leqslant a_n \cdot 1$. Так как элемент h одновременно сингулярен, то $|h| \wedge |h_n| = 0$. Поэтому $|h| = |h| \wedge |h| = O\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} (|h| \wedge |h_n|) = 0$.

Приложение к теореме Радона — Никодима. Рассмотрим случай $X = A(S, \mathfrak{B})$. Мы уже знаем (предложение 1, гл. XII, § 3), что векторная структура $A(S, \mathfrak{B})$ является σ-полной и в $A(S, \mathfrak{B})$

$$x^+(B) = \sup_{B' \subseteq B} x(B') = \overline{V}(x; B), \tag{2}$$

где $\overline{V}(x; B)$ — положительная вариация x на B. Нам потребуется следующее вспомогательное

Предложение. Пусть $x > 0$ и $z \geqslant 0$ — элементы структуры $A(S, \mathfrak{B})$ и $x \wedge z = 0$. Тогда найдется такое множество $B_0 \in \mathfrak{B}$, что $x(B_0) = 0$ и $z(S - B_0) = 0$.

Доказательство. Так как $x \wedge z = (x - z)^- + z$, то из (2) следует, что

$$(x \wedge z)(B) = \inf_{B' \subseteq B} (x - z)(B') + z(B) = \inf_{B' \subseteq B} [x(B') + z(B - B')]. \tag{3}$$

Отсюда, используя предположение $x \wedge z = 0$, мы находим, что

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} [x(B) + z(S - B)] = (x \wedge z)(S) = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B_\varepsilon \in \mathfrak{B}$, что $x(B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, $z(S - B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Положим $B_0 = \bigwedge\limits_{k \geqslant 1} \left(\bigvee\limits_{n \geqslant k} B_{2^{-n}} \right)$. Тогда из σ-аддитивности функций $x(B)$ и $z(B)$ следует, что

$$0 \leqslant x(B_0) = \lim_{k \to \infty} x\left(\bigvee_{n \geqslant k} B_{2^{-n}} \right) \leqslant \lim_{k \to \infty} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 0,$$

$$0 \leqslant z(S - B_0) = \lim_{k \to \infty} z\left(S - \bigvee_{n \geqslant k} B_{2^{-n}} \right) \leqslant \lim_{k \to \infty} z\left(S - B_{2^{-k}} \right) = 0.$$

Следствие. Пусть e — квазиединица векторной структуры $A(S, \mathfrak{B})$ по отношению к некоторому элементу $x > 0$. Тогда существует множество $B_1 \in \mathfrak{B}$, такое, что

$$e(B) = x(B \cap B_1) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как $(x - e) \wedge e = 0$, найдется такое множество $B_0 \in \mathfrak{B}$, что $e(B_0) = 0$, $(x - e)(S - B_0) = 0$. Поэтому $e(S - B_0) = x(S - B_0) = e(S)$ и, следовательно, $e(B) = x(B - B_0) = x(B \cap B_1)$, где $B_1 = S - B_0$.

Теперь мы можем доказать теорему Радона — Никодима теории интегрирования. Из следствия видно, что квазиединица e по отношению к элементу $x > 0$ — это не что иное, как *сужение* $e(B) = x(B \cap B_e)$

меры x [1]). Следовательно, всякий конечнозначный элемент из $A(S, \mathfrak{B})$ можно рассматривать как интеграл вида

$$\sum_i \lambda_i \int_{B \cap B_i} x\, ds,$$

т. е. как неопределенный интеграл от простой функции. Значит, абсолютно непрерывные элементы из $A(S, \mathfrak{B})$ представляют собой неопределенные интегралы по отношению к мере $x(B)$. Доказанное выше предложение утверждает, что сингулярному (по отношению к единице x) элементу g соответствует множество $B_0 \in \mathfrak{B}$, такое, что $x(B_0) = 0$, $g(B) = g(B \cap B_0)$ для всех $B \in \mathfrak{B}$. Такую меру $g(B)$ называют *сингулярной* (по отношению к $x(B)$). Мы показали, таким образом, что всякий элемент $f \in A(S, \mathfrak{B})$ представляется в виде суммы неопределенного интеграла (по отношению к $x(B)$) и сингулярной (по отношению к $x(B)$) меры $g(B)$, причем это разложение единственно. Полученный результат и составляет содержание теоремы Радона — Никодима.

Замечание. Приведенная в этом параграфе теорема взята из работы Иосида [6]. Ср. Рисс [6], Фрейденталь [2] и Какутани [5]. По поводу дальнейших ссылок см. Биркгоф Г. [1] [2]).

---

[1]) Если $\mathfrak{B}$ есть σ-аддитивное семейство множеств $B \subseteq S$, то семейство $\mathfrak{B}' = \{B' \in \mathfrak{B};\ B' \subseteq B_0\} = \{B' = B_0 \cap B,\ B \in \mathfrak{B}\}$, где $B_0 \in \mathfrak{B}$, называется *сужением* $\mathfrak{B}$ *на* B_0. Соответственно сужение функции множества $x(B)$, заданной на $\mathfrak{B}$, на семейство $\mathfrak{B}'$ называется *сужением* x *на* B_0. Мера $e(B) = x(B \cap B_1)$, которая рассматривается в (4), фактически определена на множествах вида $B' = B \cap B_1$ и является сужением x на B_1. — *Прим. перев.*

[2]) По теории векторных структур см. Канторович [2*], Вулих [2*]; общие сведения по теории структур см. также в книге Куроша [1*]. — *Прим. перев.*