ГЛАВА XIII

Эргодическая теория и теория диффузионных процессов

Эргодическая теория и теория диффузионных процессов представляют собой широкое поле для приложения результатов аналитической теории полугрупп. С математической точки зрения эргодическая теория связана с изучением „временны́х средних" вида $\lim\limits_{t \uparrow \infty} t^{-1} \int\limits_0^t T_s \, ds$ для полугрупп операторов T_t, а теория диффузионных процессов изучает стохастические процессы с помощью исследования свойств инфинитезимальных производящих операторов полугрупп, внутренне связанных с рассматриваемыми стохастическими процессами.

1. Марковский процесс с инвариантной мерой

В 1862 г. английский ботаник Броун, наблюдая под микроскопом за движением мельчайших частиц цветочной пыльцы, взвешенных в жидкости, обратил внимание на хаотическое движение этих частиц, беспрестанно меняющих свое положение и направление движения. Для описания такого рода явлений рассматривается так называемая переходная функция $P(t, x, s, E)$; величина $P(t, x, s, E)$ соответствует вероятности того, что частица, занимающая положение x в момент времени t, будет находиться в точке, принадлежащей множеству E, в последующий момент времени s. Введение такой переходной функции основывается на гипотезе о том, что хаотическое движение частиц после момента времени t совершенно не зависит от истории их движения, относящейся ко времени, предшествующему t. Иными словами, предполагается, что хаотическое движение после момента t полностью определяется расположением этих частиц в момент времени t. Это предположение о том, что ансамбль частиц не имеет памяти, приводит к тому, что переходная функция $P(t, x, s, E)$ должна удовлетворять уравнению вида

$$P(t, x, s, E) = \int\limits_S P(t, x, u, dy) P(u, y, s, E) \quad \text{при} \quad t < u < s, \tag{1}$$

где интегрирование выполняется по всему пространству S, занятому хаотическим движением частиц.

Процесс, который развивается во времени в соответствии с переходной функцией $P(t, x, s, E)$, удовлетворяющей уравнению (1), называется *марковским процессом*, а уравнение (1) называется *уравнением Чепмена — Колмогорова*. Понятие марковского процесса является естественным обобщением понятия детерминированного процесса, при котором $P(t, x, s, E)=1$, если $y \in E$ $(y= y(x, t, s))$, и $P(t, x, s, E)=0$, если $y \notin E$, т. е. когда частица, занимающая положение x в момент времени t, в любой последующий фиксированный момент s с вероятностью 1 попадает в положение $y=y(x, t, s)$. Марковский процесс P называют *однородным во времени*, если $P(t, x, s, E)$ как функция t и s зависит только от разности $(s-t)$. В этом случае для изучения процесса приходится рассматривать переходную функцию $P(t, x, E)$, определяющую вероятность перехода частицы из положения x в точку множества E по прошествии t единиц времени. Уравнение (1) приобретает тогда форму

$$P(t+s, x, E)=\int_S P(t, x, dy) P(s, y, E) \quad \text{при} \quad t, s>0. \tag{2}$$

Процесс $P(t, x, E)$ порождает в соответствующем функциональном пространстве X некоторое линейное преобразование T_t, определяемое формулой

$$(T_t f)(x)=\int_S P(t, x, dy) f(y), \qquad f \in X, \tag{3}$$

для которого имеет место *полугрупповое свойство*

$$T_{t+s}=T_t T_s \quad (t, s>0). \tag{4}$$

Основная математическая проблема статистической механики связана с существованием временно́го среднего значения

$$\lim_{t \uparrow \infty} t^{-1} \int_0^t T_s f\, ds. \tag{5}$$

Рассмотрим в качестве примера детерминированное механическое движение, описываемое некоторой системой уравнений Гамильтона с гамильтонианом, не зависящим явно от времени t. В этом случае траектория движения, выходящая из точки $x \in S$, приходит по прошествии t единиц времени в точку $y_t(x) \in S$, и при этом, согласно классической теореме Лиувилля, отображение $x \to y_t(x)$ множества S на себя оставляет инвариантным так называемый „фазовый объем" в пространстве S; в этом смысле отображение $x \to y_t(x)$ *сохраняет меру*. Оператор T_t определяется в этом случае как

$$(T_t f)(x)=f(y_t(x)). \tag{6}$$

Известная *эргодическая гипотеза Больцмана* утверждает, что

> среднее по времени движения от некоторой физической величины, связанной с вышеописанным движением, совпадает с ее пространственным средним значением.

Если предположить, что $\int\limits_S dx < \infty$, где dx — элемент фазового объема, то математически эта гипотеза выразится соотношением

$$\lim_{t \uparrow \infty} t^{-1} \int\limits_0^t f(y_s(x))\, ds = \int\limits_S f(x)\, dx \Big/ \int\limits_S dx \quad \text{для всех} \quad f \in X. \tag{7}$$

Естественным обобщением понятия преобразования $x \to y_t(x)$, сохраняющего меру, в случае марковского процесса $P(t, x, E)$ является предположение о существовании так называемой *инвариантной меры* $m(dx)$:

$$\int\limits_S m(dx) P(t, x, E) = m(E) \text{ для всех } t > 0 \text{ и всех } E. \tag{8}$$

Эти предварительные рассуждения приводят нас к следующему определению.

Определение. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое σ-аддитивное семейство подмножеств B множества S, содержащее само S. Допустим, что при любых $t > 0$, $x \in S$ и произвольном $E \in \mathfrak{B}$ определена функция $P(t, x, E)$, удовлетворяющая требованиям

$$P(t, x, E) \geqslant 0, \quad P(t, x, S) = 1; \tag{9}$$

при любых фиксированных t и x функция $P(t, x, E)$ σ-аддитивна относительно множеств $E \in \mathfrak{B}$; (10)

при фиксированных t и E функция $P(t, x, E)$ $\mathfrak{B}$-измерима по переменной x; (11)

$$P(t+s, x, E) = \int\limits_S P(t, x, dy) P(s, y, E) \tag{12}$$

(уравнение Чепмена — Колмогорова).

При выполнении этих условий говорят, что $P(t, x, E)$ определяет *марковский процесс в фазовом пространстве* $(S, \mathfrak{B})$. В тех случаях, когда мы будем дополнительно предполагать, что $(S, \mathfrak{B}, m)$ образует пространство с мерой m, такое, что выполняется условие

$$\int\limits_S m(dx) P(t, x, E) = m(E) \quad \text{для всех} \quad E \in \mathfrak{B}, \tag{13}$$

$P(t, x, E)$ будет называться *марковским процессом с инвариантной мерой* $m(E)$.

Теорема 1. Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, такой, что $m(S) < \infty$. Норму пространства $X_p = L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ обозначим символом $\|f\|_p$, $p \geqslant 1$. Тогда условие (3) определяет ограниченный линейный оператор $T_t \in L(X_p, X_p)$, такой, что $T_{t+s} = T_t T_s$ $(t, s > 0)$, и при этом

оператор T_t *положителен* в том смысле, что при $f(x) \geqslant 0$ m-п. в. также и $(T_t f)(x) \geqslant 0$ m-п. в., (14)

$$T_t \cdot 1 = 1, \tag{15}$$

$$\|T_t f\|_p \leqslant \|f\|_p \text{ при } f \in X_p = L^p(S, \mathfrak{B}, m), \text{ когда } p = 1, 2 \text{ и } \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Утверждения (14) и (15) очевидны. Пусть $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$. Тогда ввиду (9), (10) и (11) функция $f_t(x) = (T_t f)(x) \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ определена и $\|f_t\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Следовательно, учитывая (9) и (13), мы видим, что для $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ при значениях $p = 1$ или $p = 2$

$$\|f_t\|_p = \left\{ \int_S m(dx) \left| \int_S P(t, x, dy) f(y) \right|^p \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_S m(dx) \left[\int_S P(t, x, dy) |f(y)|^p \cdot \int_S P(t, x, dy) \cdot 1^p \right] \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \int_S m(dy) |f(y)|^p \right\}^{1/p} = \|f\|_p.$$

Возьмем неотрицательную функцию $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ $(p = 1$ или $p = 2)$ и положим ${}_nf(s) = \min(f(s), n)$, где n — целое положительное число. Тогда на основании установленных выше результатов мы приходим к неравенствам $0 \leqslant ({}_nf(s))_t \leqslant ({}_{n+1}f(s))_t$ и $\|({}_nf)_t\|_p \leqslant \|{}_nf\|_p \leqslant \|f\|_p$. Поэтому, полагая $f_t(s) = \lim\limits_{n \to \infty} ({}_nf(s))_t$ и применяя лемму Лебега — Фату, мы находим, что $\|f_t\|_p \leqslant \|f\|_p$, т. е. $f_t \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$. Применяя лемму Лебега — Фату еще раз, получаем неравенство

$$f_t(x) = \lim_{n \to \infty} \int_S P(t, x, dy)({}_nf(y)) \geqslant \int_S P(t, x, dy) \Bigl(\lim_{n \to \infty} ({}_nf(y)) \Bigr) =$$

$$= \int_S P(t, x, dy) f(y).$$

Следовательно, функция $f(y)$ интегрируема по отношению к мере $P(t, x_0, dy)$ при тех значениях x_0, для которых $f_t(x_0) \neq \infty$, т. е. m-п. в. относительно переменной x_0. Отсюда по лемме Лебега — Фату

$$\int_S P(t, x_0, dy) \Bigl(\lim_{n \to \infty} ({}_nf(y)) \Bigr) = \lim_{n \to \infty} \int_S P(t, x_0, dy)({}_nf(y)).$$

Таким образом, $f_t(x_0) = \int_S P(t, x_0, dy) f(y)$ m-п. в. и $\|f_t\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Для произвольного элемента $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ аналогичный результат получается, если применить положительный оператор T_t в отдельности к f^+ и f^-.

Теорема 2 (Иосида). Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, такой, что $m(S) < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при $p = 1$ или $p = 2$ выполняется утверждение статистической эргодической теоремы

$$\begin{gathered} s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} T_k f = f^* \quad \text{существует в } L^p(S, \mathfrak{B}, m) \\ \text{при всех } f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m) \text{ и } T_1 f^* = f; \end{gathered} \tag{17}$$

кроме того,

$$\int_S f(s)\, m(ds) = \int_S f^*(s)\, m(ds). \tag{18}$$

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ утверждение (17) статистической эргодической теоремы выполняется на основании условия (16) и общей статистической эргодической теоремы из гл. VIII, § 3.

Поскольку $m(S) < \infty$, мы замечаем, применяя неравенство Шварца, что всякая функция $f \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ принадлежит пространству $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \cdot m(S)^{1/2}$. Поэтому соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \left| f^*(s) - n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (T_k f)(s) \right| m(ds) = 0$$

статистической эргодической теоремы и равенство $T_1 f^* = f^*$ справедливы для всякой функции $f \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$. Используя еще раз требование $m(S) < \infty$ и равенства

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|f - {}_n f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_S |f(s) - {}_n f(s)|\, m(ds)$$

и

$${}_n f(s) = \min(f(s), n),$$

мы видим, что $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ плотно в $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ (в топологии L^1). Это означает, что для любых $f \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f_\varepsilon \in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \cap L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, что $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Отсюда на основании (16) мы находим, что

$$\left\| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} T_k f - n^{-1} \sum_{k=1}^{n} T_k f_\varepsilon \right\|_1 \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Соотношение (17) статистической эргодической теоремы выполняется для f_ε в пространстве $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, и поэтому полученное выше неравенство показывает, что (17) выполняется также в $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и для функции f.

Поскольку из сильной сходимости вытекает слабая сходимость, условие (18) следует из (17).

Замечание 1. Приведенная выше теорема 2 принадлежит Иосида [17]. См. также работу Какутани [6], где сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_k f)(x)$ m-п. в. доказана для произвольной функции $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$. Можно показать, что в случае, когда полугруппа T_t сильно непрерывна по t, выражение $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} T_k f$ в (17) можно заменить на $s\text{-}\lim\limits_{t\uparrow\infty} t^{-1}\int\limits_0^t T_s f\, ds$. Мы не будем здесь приводить деталей последних утверждений, их можно найти в книгах по эргодической теории Хопфа Э. [1] и Джекобса [1]. Укажем также на интересный доклад Какутани [8] о развитии эргодической теории от доклада Э. Хопфа в 1937 г. до Международного конгресса математиков в 1950 г. (Кембридж).

Для обоснования эргодической гипотезы (7), нам придется доказать так называемую *индивидуальную эргодическую теорему*, чтобы убедиться в существовании

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_k f)(x) = f^*(x) \ m\text{-п. в.}$$

В следующем параграфе мы рассмотрим сходимость m-п. в. последовательности вида $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_k f)(x)$. Наша цель будет состоять в том, чтобы, используя теорему Банаха о сходимости из § 4 гл. XII, вывести m-п. в. сходимость из сходимости в среднем.

2. Индивидуальная эргодическая теорема и ее приложения

Вначале будет доказана

Теорема 1 (Иосида). Пусть X_1 — некоторая вещественная σ-полная F-структура с квазинормой $\|x\|_1$, такая, что

$$\text{если } O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{то } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1 = \|x\|_1. \tag{1}$$

Предположим, что некоторое линейное подпространство X пространства X_1 представляет собой вещественное B-пространство с нор-