Соотношение (17) статистической эргодической теоремы выполняется для f_ε в пространстве $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, и поэтому полученное выше неравенство показывает, что (17) выполняется также в $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и для функции f.

Поскольку из сильной сходимости вытекает слабая сходимость, условие (18) следует из (17).

Замечание 1. Приведенная выше теорема 2 принадлежит Иосида [17]. См. также работу Какутани [6], где сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_k f)(x)$ m-п. в. доказана для произвольной функции $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$. Можно показать, что в случае, когда полугруппа T_t сильно непрерывна по t, выражение $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} T_k f$ в (17) можно заменить на $s\text{-}\lim\limits_{t\uparrow\infty} t^{-1}\int\limits_0^t T_s f\,ds$. Мы не будем здесь приводить деталей последних утверждений, их можно найти в книгах по эргодической теории Хопфа Э. [1] и Джекобса [1]. Укажем также на интересный доклад Какутани [8] о развитии эргодической теории от доклада Э. Хопфа в 1937 г. до Международного конгресса математиков в 1950 г. (Кембридж).

Для обоснования эргодической гипотезы (7), нам придется доказать так называемую *индивидуальную эргодическую теорему*, чтобы убедиться в существовании

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_k f)(x) = f^*(x) \quad m\text{-п. в.}$$

В следующем параграфе мы рассмотрим сходимость m-п. в. последовательности вида $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_k f)(x)$. Наша цель будет состоять в том, чтобы, используя теорему Банаха о сходимости из § 4 гл. XII, вывести m-п. в. сходимость из сходимости в среднем.

2. Индивидуальная эргодическая теорема и ее приложения

Вначале будет доказана

Теорема 1 (Иосида). Пусть X_1 — некоторая вещественная σ-полная F-структура с квазинормой $\|x\|_1$, такая, что

$$\text{если } O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{то } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1 = \|x\|_1. \tag{1}$$

Предположим, что некоторое линейное подпространство X пространства X_1 представляет собой вещественное B-пространство с нормой $\|x\|$, такой, что

$$\text{если } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ в } X, \quad \text{то } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ в } X_1. \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность $\{T_n\}$ ограниченных линейных операторов, отображающих X в себя, удовлетворяющую следующему условию:

> для значений x, образующих в X множество S второй категории, существует верхний предел $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |T_n x|$. (3)

Допустим, что некоторому $z \in X$ соответствует такой элемент $\bar{z} \in X$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n z - \bar{z}\| = 0, \tag{4}$$

$$T_n \bar{z} = \bar{z} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} (T_n z - T_n T_k z) = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Тогда

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n z = \bar{z}. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $z = \bar{z} + (z - \bar{z})$. Определим теперь равенством

$$\tilde{T}x = O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x - O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x \tag{8}$$

оператор $\tilde{T}$, действующий из S в X_1. Тогда ввиду (5)

$$0 \leqslant \tilde{T}z \leqslant \tilde{T}(z - \bar{z}).$$

Из (6) следует, что $\tilde{T}(z - T_k z) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и ввиду (4) $\lim\limits_{k\to\infty} \|(z - \bar{z}) - (z - T_k z)\| = 0$. Поэтому, применяя теорему Банаха из § 4 гл. XII, мы находим, что $\tilde{T}(z - \bar{z}) = 0$. Следовательно. $0 \leqslant \tilde{T}z \leqslant 0$, т. е. $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n z = w$ существует.

Мы должны теперь показать, что $w = \bar{z}$. Из (4) и (2) мы получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n z - \bar{z}\|_1 = 0$. Кроме того, из (1) и условия $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n z = w$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n z - w\|_1 = 0$. Таким образом, $w = \bar{z}$. Теорема доказана.

Пусть теперь X_1 — вещественное пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$, а X — вещественное пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. При этих условиях справедлива следующая индивидуальная эргодическая теорема.

Теорема 2 (Иосида). Рассмотрим ограниченный линейный оператор T, отображающий пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя, и допустим, что $m(S) < \infty$. Предположим также, что

$$\|T^n\| \leqslant C < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (T^m x)(s) \right| < \infty \ m\text{-п. в.} \tag{10}$$

Пусть для некоторого элемента $z \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}(T^n z)(s) = 0 \ m\text{-п. в.} \tag{11}$$

и

последовательность $\left\{ n^{-1} \sum\limits_{m=1}^{n} T^m z \right\}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\bar{z} \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. (12)

Тогда

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} T^m z = \bar{z}, \quad T\bar{z} = \bar{z}, \tag{13}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (T^m z)(s) = \bar{z}(s) \quad m\text{-п. в.} \tag{14}$$

Доказательство. Возьмем пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ и будем рассматривать $X_1 = M(S, \mathfrak{B}, m)$ как F-структуру с квазинормой $\|x\|_1 = \int\limits_S |x(s)|(1 + |x(s)|)^{-1} m(ds)$, а в качестве B-структуры X примем $X = L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ с нормой $\|x\| = \int\limits_S |x(s)| m(ds)$. Через T_n обозначим выражение $n^{-1} \sum\limits_{m=1}^{n} T^m$. Условия теоремы 1, как нетрудно проверить, здесь выполняются. Проверим, например, требование (6). Из равенства

$$T_n z - T_n T^k z = n^{-1}(T + T^2 + \ldots + T^n) z - \\ - n^{-1}(T^{k+1} + T^{k+2} + \ldots + T^{k+n}) z$$

и (11) мы находим, что $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n z - T_n T^k z)(s) = 0$ m-п. в. для значений $k = 1, 2, \ldots$. Возьмем теперь арифметическое среднее по k; тогда для значений $k = 1, 2, \ldots$ получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n z - T_n T_k z)(s) = 0$ m-п. в. Условия (4) и (5), совпадающие с (13), следуют из статистической эргодической теоремы гл. VIII, § 3.

Замечание. Приведенные выше две теоремы взяты из работ Иосида [15] и [18]. В этих статьях приводятся также некоторые другие эргодические теоремы, вытекающие из теоремы 1.

Следующий результат, принадлежащий Э. Хопфу [3], касается некоторого общего условия, из которого, в частности, вытекает (11).

Теорема 3. Пусть T — некоторый положительный линейный оператор, отображающий вещественное пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя, L^1-норма которого удовлетворяет неравенству $\|T\| \leqslant 1$. Если $f \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и функция $p \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ такова, что $p(s) \geqslant 0$ m-п. в., то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(T^n f)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n-1}(T^j p)(s)\right\} = 0 \quad m\text{-п. в. на множестве, где } p(s) > 0.$$

Если $m(S) < \infty$ и $T \cdot 1 = 1$, то, полагая $p(s) = 1$, мы получаем из приведенного выше соотношения условие (11).

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая $f \geqslant 0$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функции

$$g_n = T^n f - \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} T^j p, \quad g_0 = f.$$

Обозначим через $x_n(s)$ характеристические функции множеств $\{s \in S;\ g_n(s) \geqslant 0\}$. Так как $x_n g_n = g_n^+ = \max(g, 0)$ и $g_{n+1} + \varepsilon p = T g_n$, то, учитывая положительность оператора T и неравенство $\|T\| \leqslant 1$, находим

$$\begin{aligned}\int_S g_{n+1}^+ \cdot m(ds) + \varepsilon \int_S x_{n+1} p \cdot m(ds) &= \int_S x_{n+1}(g_{n+1} + \varepsilon p)\, m(ds) = \\ &= \int_S x_{n+1} T g_n \cdot m(ds) \leqslant \int_S x_{n+1} T g_n^+ \cdot m(ds) \leqslant \\ &\leqslant \int_S T g_n^+ \cdot m(ds) \leqslant \int_S g_n^+ \cdot m(ds).\end{aligned}$$

Суммируя полученные неравенства по n, начиная со значения $n = 0$, получаем

$$\int_S g_n^+ \cdot m(ds) + \varepsilon \int_S p \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot m(ds) \leqslant \int_S g_0^+ \cdot m(ds),$$

откуда следует, что

$$\int_S p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot m(ds) \leqslant \varepsilon^{-1} \int_S g_0^+ \cdot m(ds).$$

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(s)$ сходится m-п. в. на множестве, где $p(s) > 0$. Следовательно, на множестве точек, где $p(s) > 0$, должно m-п. в. при достаточно больших значениях n выполняться неравенство $g_n(s) < 0$.

Мы, таким образом, доказали, что $(T^n f)(s) < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (T^k p)(s)$ m-п. в. для достаточно больших значений n на множестве, где $p(s) > 0$. Поскольку значение $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, отсюда вытекает утверждение теоремы.

Следующая теорема, принадлежащая Чакону — Орнстейну [1], касается условия, из которого как частный случай следует (10).

Теорема 4 (Чакон, Орнстейн). Пусть положительный линейный оператор T отображает вещественное пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя и его L^1-норма удовлетворяет неравенству $\|T\|_1 \leqslant 1$. Пусть функции f и p принадлежат $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и $p(s) \geqslant 0$; тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (T^k f)(s) \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} (T^k p)(s) \right\} \text{ конечен } m\text{-п. в.}$$

$$\text{на множестве, где } \sum_{n=0}^{\infty} (T^n p)(s) > 0.$$

Если $m(S) < \infty$ и $T \cdot 1 = 1$, то, полагая $p(s) = 1$, мы получаем из приведенного выше соотношения условие (10).

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма (Чакон — Орнстейн [1]). Если $f = f^+ + f^-$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n} (T^k f)(s) > 0$$

на некотором множестве B, то найдутся последовательности $\{d_k\}$ и $\{f_k\}$ неотрицательных функций, такие, что для любого N

$$\int_S \sum_{k=0}^{N} d_k \cdot m(ds) + \int_S f_N \cdot m(ds) \leqslant \int_S f^+ \cdot m(ds), \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(s) = -f^-(s) \text{ на множестве } B, \tag{16}$$

$$T^N f^+ = \sum_{k=0}^{N} T^{N-k} d_k + f_N. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим через d_0, f_0, f_{-1} выражения

$$d_0 = 0, \quad f_0 = f^+, \quad f_{-1} = 0$$

и определим по индукции величины

$$f_{i+1}=(Tf_i+f^-+d_0+\ldots+d_i)^+,\quad d_{i+1}=Tf_i-f_{i+1}. \tag{18}$$

Заметим, что

$$f^-+d_0+\ldots+d_i\leqslant 0 \tag{19}$$

и что равенство достигается на множестве, где $f_i(s)>0$, для

$$\begin{aligned} f_i&=(Tf_{i-1}+f^-+d_0+\ldots+d_{i-1})^+=\\ &=(Tf_{i-1}-f_i+f^-+d_0+\ldots+d_{i-1}+f_i)^+=\\ &=(d_i+f^-+d_0+\ldots+d_{i-1}+f_i)^+. \end{aligned}$$

Из (18) получаем соотношение

$$T^jf^+=\sum_{k=0}^{j}T^{j-k}d_k+f_j. \tag{20}$$

По определению f_i неотрицательны, так же как и d_i в силу (18) и (19). Из (20) мы находим, что

$$\sum_{j=0}^{n}T^jf^+=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}T^{j-k}d_k+\sum_{j=0}^{n}f_j. \tag{21}$$

Докажем теперь неравенство

$$\sum_{j=0}^{n}T^jf^+\leqslant\sum_{j=0}^{n}d_j-\sum_{j=1}^{n}T^jf^-+\sum_{j=0}^{n}f_j. \tag{22}$$

Для этого заметим, что

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}T^{j-k}d_k=\sum_{j=0}^{n}T^j\left(\sum_{k=0}^{n-j}d_k\right)$$

и что вследствие положительности оператора T и условия (19)

$$-T^jf^-\geqslant T^j\left(\sum_{k=0}^{n-j}d_k\right)\quad\text{при}\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{23}$$

Перепишем теперь неравенство (22) в виде

$$\sum_{j=0}^{n}T^j(f^++f^-)\leqslant\sum_{j=0}^{n}(d_j+f_j)+f^-. \tag{24}$$

Теперь мы докажем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty}d_j(s)+f^-(s)\geqslant 0\ m\text{-п. в. на } B. \tag{25}$$

Из замечания, сделанного ранее по поводу условия (19), следует, что (25) переходит в равенство, выполняющееся m-п. в. на множестве $C=\{s\in S;\ f_j(s)>0$ при некотором $j\geqslant 0\}$. Остается лишь убедиться в том, что условие (25) справедливо для множества $B-C$. Последнее утверждение вытекает из того, что вследствие (24) неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty}(d_j+f_j)(s)+f^-(s)\geqslant 0$$

выполняется и на B, и на множестве $B-C$.

Заметим, далее, что условие (17) совпадает с (20) и что (16) вытекает из (19) и (25). Наконец, (15) следует из неравенства

$$\int_S\left(\sum_{k=0}^{j}d_k+f_j\right)m(ds)\geqslant\int_S\left(\sum_{k=0}^{j}d_k+T\cdot f_j\right)m(ds)=$$
$$=\int_S\left(\sum_{k=0}^{j+1}d_k+f_{j+1}\right)m(ds),$$

которое в свою очередь вытекает из условия (18) и предположений, сделанных относительно оператора T. В самом деле, неравенство (15) легко теперь устанавливается с помощью индукции по j, так как $d_0+f_0=f^+$.

Доказательство теоремы 4. Достаточно доказать теорему в предположении, что $f(s)\geqslant 0$ на S, причем нужно установить лишь конечность указанного в теореме верхнего предела в случае, когда $p(s)>0$. Первое из этих замечаний вполне очевидно, а второе доказывается следующим образом. Если допустить, что указанный верхний предел конечен во всякой точке s, в которой $p(s)>0$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sum_{j=0}^{n}\left(T^{j+k}f\right)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n}\left(T^{j+k}p\right)(s)\right\}\ \text{конечен}$$
$$m\text{-п. в. на множестве, где } \left(T^kp\right)(s)>0, \tag{26}$$

откуда следует, что предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sum\limits_{j=0}^{n}\left(T^jf\right)(s)\Big/\sum\limits_{j=0}^{n}\left(T^jp\right)(s)\right\}$ конечен m-п. в. на множестве, где $\left(T^kp\right)(s)>0$.

Итак, покажем, что при $f(s)\geqslant 0$ на S верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sum\limits_{j=0}^{n}\left(T^jf\right)(s)\Big/\sum\limits_{j=0}^{n}\left(T^jp\right)(s)\right\}$ конечен в тех точках, где $p(s)>0$.

Для этого допустим противное. Тогда предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sum_{j=0}^{n}(T^j f)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n}(T^j p)(s)\right\}$$

бесконечен m-п. в. на некотором множестве E положительной m-меры и $p(s)>\beta>0$ на множестве E, где β — некоторая положительная постоянная. Тогда найдется такое положительное значение α, что

$$\sup_n\left\{\sum_{j=0}^{n}\left(T^j\left((f-\alpha p)^+ + (f-\alpha p)^-\right)\right)(s)\right\}>0$$

m-п. в. на множестве E. Заменяя f на $(f-\alpha p)$ и применяя доказанную выше лемму, мы выводим из условий (15) и (16) неравенства

$$\int_S (f-\alpha p)^+ m(ds)\geqslant\int_S\sum_{k=0}^{\infty}d_k m(ds)\geqslant-\int_E (f-\alpha p)^- m(ds).$$

Однако при $\alpha\uparrow\infty$ выражение $-\int_E (f-\alpha p)^- m(ds)$ стремится к ∞, а величина $\int_S (f-\alpha p)^+ m(ds)$ при $\alpha\uparrow\infty$ ограничена. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

Из доказанных в этом разделе утверждений вытекает

Теорема 5. Пусть положительный линейный оператор T отображает пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя и его L^1-норма удовлетворяет условию $\|T\|_1\leqslant 1$. Если $m(S)<\infty$ и $T\cdot 1=1$, то для любой функции $f\in L^1(S, \mathfrak{B}_1, m)$, для которой последовательность $\left\{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}T^j f\right\}$ сходится в среднем, эта последовательность сходится и m-п. в.

Из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. Пусть $P(t, x, E)$ — марковский процесс с инвариантной мерой m, определенный на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, причем $m(S)<\infty$. Тогда для линейных операторов T_t, определяемых равенством $(T_t f)(x)=\int_S P(t, x, dy)f(y)$, справедливы следующие утверждения:

1. (*Статистическая эргодическая теорема*)

Для любой функции $f\in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ в пространстве $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ существует $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}T_k f=f^*$, и $T_1 f^*=f^*$ $(p=1, 2)$. (27)

2. (*Индивидуальная эргодическая теорема*)

Для любой функции $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при значениях $p = 1$ или $p = 2$ существует m-п. в. конечный $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} (T_k f)(s)$, равный $f^*(s)$ m-п. в., и, кроме того, $\int\limits_S f(s)\, m(ds) = \int\limits_S f^*(s)\, m(ds)$. (28)

Доказательство. По теореме 2 предыдущего параграфа условие (27) статистической эргодической теоремы выполняется, и поэтому можно применить теорему 5.

Замечание. Если оператор T_t определяется сохраняющим меру преобразованием $x \to y_t(x)$ пространства S на S, то утверждение (27) совпадает со статистической эргодической теоремой фон Неймана [3], а результат (28) — с индивидуальной эргодической теоремой Биркгофа Дж. [1] и Хинчина [1].

Исторические замечания. Первое теоретико-операторное обобщение индивидуальной эргодической теоремы типа Биркгофа — Хинчина было предложено Дубом [1]. Он доказал, что выражение $n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} (T_k f)(x)$ сходится m-п. в., если оператор T_t определяется некоторым марковским процессом $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, такой, что $m(S) = 1$, а функция f является характеристической функцией некоторого множества из $\mathfrak{B}$. Какутани [6] заметил, что метод Дуба можно применить с тем же результатом и в том случае, когда функция f ограничена и $\mathfrak{B}$-измерима. Далее Э. Хопф [2] доказал эту теорему в предположении, что f является m-интегрируемой. Данфорд и Дж. Шварц [4] обобщили результат Хопфа, доказав, что утверждение (28) справедливо для линейных операторов T_t, не увеличивающих норм ни в L^1, ни в L^∞, не предполагая положительности T_t, но при дополнительном ограничении, что $T_k = T_1^k$ и $T_1 \cdot 1 = 1$. Отметим, что в доказательстве Хопфа и Данфорда — Шварца используются идеи доказательства нашей теоремы 1. Чакон и Орнстейн [1] доказали (28) для положительного линейного оператора T_1 с L^1-нормой, не превосходящей 1, без предположения о том, что T_t не увеличивает L^∞-нормы и, более того, не используя теорему 1. При этом, естественно, предполагалось, что $T_k = T_1^k$ и $T_1 \cdot 1 = 1$. Мы не будем углубляться в детали, относящиеся к этому вопросу поскольку в данной главе рассматриваются марковские процессы и для обоснования эргодической теории вполне достаточно теоремы 6, которая вытекает из нашей теоремы 1.