3. Эргодическая гипотеза и H-теорема

Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, определенный в пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, таком, что $m(S)=1$. Предположим, что процесс $P(t, x, E)$ удовлетворяет следующему *условию эргодичности*:

среднее значение по времени

$$f^*(s)=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_k f)(x)$$

совпадает m-п. в. со средним значением по пространству, т. е. с величиной

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int_S P(k, x, dy) f(y) \qquad (1)$$

для всякой функции $f\in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при значениях $p=1$ или $p=2$.

Так как $\int\limits_S f^*(x)\, m(dx)=\int\limits_S f(x)\, m(dx)$, то условие (1) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$f^*(x)=\text{const}\ m\text{-п. в. для всякой } f\in L^p(S, \mathfrak{B}, m)\ (p=1, 2). \qquad (1')$$

Мы приведем здесь три различные интерпретации эргодической гипотезы (1), (1′).

1. Обозначим через $\chi_B(x)$ характеристическую функцию множества $B\in\mathfrak{B}$. При выполнении (1′) для любых двух множеств $B_1, B_2\in\mathfrak{B}$ *средняя по времени вероятность того, что точки множества B_1 будут перенесены в множество B_2 за k единиц времени, равна произведению $m(B_1)\, m(B_2)$*. Иначе говоря,

$$\left(\chi^*_{B_2}, \chi_{B_1}\right)=m\left(B_1\right) m\left(B_2\right). \qquad (2)$$

Доказательство. Если $f, g\in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$, то из сильной сходимости $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} T_k f\to f^*$ в пространстве $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ следует ввиду (1′), что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_k f, g)=(f^*, g)=f^*(x)\int_S g(x)\, m(dx)=$$

$$=\int_S f(x)\, m(dx)\int_S g(x)\, m(dx) \text{ для } m\text{-п. в. } x.$$

Полагая $f(x)=\chi_{B_2}(x)$, $g(x)=\chi_{B_1}(x)$, мы и получаем (2).

Замечание. Так как множество всех линейных комбинаций функций $\chi_B(x)$ плотно в пространстве $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при $p=1$ и $p=2$, мы видим, что условие (2) эквивалентно эргодической гипотезе (1′). Соотношение (2) утверждает, что любая часть пространства S равномерно (в смысле *среднего по времени*) переносится в любую другую часть S.

2. Статистическая эргодическая теорема гл. VIII, § 3 утверждает, что область значений $R(T^*)$ отображения $f \to T^*f = f^*$ образует собственное подпространство оператора T_1, соответствующее собственному значению 1. Следовательно, *эргодическая гипотеза* (1′) *фактически утверждает, что подпространство* $R(T^*)$ *одномерно.* Таким образом, эргодическая гипотеза, относящаяся к процессу $P(t, x, E)$, может быть интерпретирована в терминах, относящихся к спектру оператора T_1.

3. Марковский процесс $P(t, x, E)$ называется *метрически транзитивным* или *неразложимым*, если удовлетворяется следующее условие:

S нельзя разложить в сумму непересекающихся множеств $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, таких, что $m(B_1) > 0$, $m(B_2) > 0$ и $P(1, x, E) = 0$ для всякого $x \in B_i$ и $E \subseteq B_j$ $(i \neq j)$. (3)

Из эргодической гипотезы вытекает условие (3) и, обратно, из (3) следует эргодичность процесса.

Доказательство. Допустим, что условие эргодичности для марковского процесса $P(t, x, E)$ выполняется и что множество S разложено в сумму множеств B_1 и B_2, удовлетворяющих условиям, указанным в (3). Характеристическая функция $\chi_{B_1}(x)$ удовлетворяет уравнению $T_1\chi_{B_1} = \chi_{B_1}$, так как

$$\int_S P(1, x, dy)\chi_{B_1}(y) = P(1, x, B_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B_1, \\ 0 & \text{при } x \notin B_1. \end{cases}$$

Но, поскольку $m(B_1)m(B_2) > 0$, функция $\chi_{B_1}(x) = \chi^*_{B_1}(x)$ не может m-п. в. обратиться в константу.

Допустим теперь, что процесс $P(t, x, E)$ неразложим. Пусть $T_1 f = f$. Покажем, что выражение $f^*(x) = f(x)$ m-п. в. обращается в константу. Поскольку оператор T_1 отображает вещественные функции в вещественные, мы можем, не ограничивая общности, допустить, что функция f вещественна. Если $f(x)$ не обращается m-п. в. в константу, то найдется такая постоянная α, что оба множества

$$B_1 = \{s \in S;\ f(s) > \alpha\} \quad \text{и} \quad B_2 = \{s \in S;\ f(s) \leqslant \alpha\}$$

будут иметь положительные m-меры. Так как $T_1(f - \alpha) = f - \alpha$, то, рассуждая как на стр. 537 в связи с угловой переменной, мы получим, что

$$T_1(f-\alpha)^+ = (f-\alpha)^+, \quad T_1(f-\alpha)^- = (f-\alpha)^-.$$

В результате мы получим, что $P(1, x, E) = 0$ при $x \in B_i$, $E \subseteq B_j$ $(i \neq j)$, а это приводит к противоречию.

Замечание. Понятие метрической транзитивности было введено Дж. Биркгофом и Смитом [2] для случая сохраняющего меру отображения $x \to y_t(x)$ множества S на себя.

Пример эргодического отображения, сохраняющего меру. Возьмем в качестве S *тор*, т. е. множество всех пар $s = \{x, y\}$ вещественных чисел x, y, причем $s = \{x, y\}$ и $s' = \{x', y'\}$ отождествляются, когда $x \equiv x' (\mathrm{mod}\, 1)$ и $y \equiv y' (\mathrm{mod}\, 1)$. Будем считать, что S топологизировано с помощью обычной топологии вещественных чисел для координат x, y. Рассмотрим отображение

$$s = \{x, y\} \to T_t s = s_t = \{x + t\alpha, y + t\beta\}$$

пространства S на себя, которое, очевидно, оставляет инвариантной меру $dx\,dy$, определенную на S. Допустим также, что вещественные числа α, β линейно независимы по модулю 1 в следующем смысле: если какие-нибудь целые числа n, k удовлетворяют уравнению $n\alpha + k\beta \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)$, то $n = k = 0$. При указанных условиях отображение $s \to T_t s$ эргодично.

Доказательство. Пусть функция $f(s) \in L^2(S)$ инвариантна относительно преобразования T_1, т. е. равенство $f(s) = f(s_1)$ справедливо $dx\,dy$-п. в. на S. Нам нужно убедиться в том, что $dx\,dy$-п. в. на S справедливо равенство $f(s) = f^*(s) = \mathrm{const}$. Рассмотрим коэффициенты Фурье функций $f(s)$ и $f(s_1) = f(T_1 s)$:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(s) \exp(-2\pi i (k_1 x + k_2 y))\, dx\, dy,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(T_1 s) \exp(-2\pi i (k_1 x + k_2 y))\, dx\, dy.$$

Так как $T_1 s = \{x + \alpha, y + \beta\}$ и мера $dx\,dy$ инвариантна относительно отображения $s \to T_1 s$, последний из этих интегралов совпадает с

$$\int_0^1 \int_0^1 f(s) \exp(-2\pi i (k_1 x + k_2 y)) \exp(2\pi i (k_1 \alpha + k_2 \beta))\, dx\, dy.$$

Так как коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $f(s)$ и $f(T_1 s)$, определяются однозначно, то

$$\exp(2\pi i(k_1\alpha + k_2\beta)) = 1 \text{ при всех } k_1,\ k_2,$$
$$\text{для которых } \int_0^1\int_0^1 f(s)\exp(-2\pi i(k_1 x + k_2 y))\,dx\,dy \neq 0.$$

Следовательно, учитывая предположения, сделанные относительно α и β, мы видим, что должно выполняться условие

$$\int_0^1\int_0^1 f(s)\exp(-2\pi i(k_1 x + k_2 y))\,dx\,dy = 0 \qquad \text{при } k_1^2 + k_2^2 \neq 0.$$

Поэтому выражение $f(s) = f^*(s)$ должно m-п. в. обратиться в константу.

Угловая переменная. Пусть оператор T_t определяется марковским процессом $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, определенным на $(S, \mathfrak{B}, m)$, причем $m(S) = 1$. Допустим, что функция $f(s) \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ является собственным вектором оператора T_1, соответствующим собственному значению λ с абсолютной величиной, равной 1:

$$T_1 f = \lambda f, \qquad |\lambda| = 1.$$

Тогда $T_1|f| = |f|$. В самом деле, ввиду положительности оператора T_1 имеем $(T_1|f|)(x) \geqslant |(T_1 f)(x)| = |f(x)|$, т. е.

$$\int_S P(1, x, dy)|f(y)| \geqslant |f(x)|.$$

В последнем неравенстве в действительности m-п. в. должно иметь место равенство — это можно установить, интегрируя обе части по мере m и учитывая инвариантность меры m. Следовательно, если процесс $P(t, x, E)$ эргодичен, то функция $|f(x)|$ должна m-п. в. обратиться в константу. Поэтому если мы положим

$$f(x) = |f(x)|\exp(i\Theta(x)), \qquad 0 \leqslant \Theta(x) < 2\pi,$$

то

$$T_1 \exp(i\Theta(x)) = \lambda \exp(i\Theta(x)).$$

В случае, когда $\lambda \neq 1$, выражение $\Theta(x)$ называется *угловой переменной* марковского процесса $P(t, x, E)$.

Гипотеза перемешивания. Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m на $(S, \mathfrak{B}, m)$ при условии $m(S) = 1$, и пусть оператор T_t определяется этим процессом. Рассмотрим следующее требование, более сильное, чем эргодическая гипотеза:

$$\lim_{k\to\infty}(T_k f,\ g)=(f^*,\ g)=\int_S f(x)\,m(dx)\int_S g(x)\,m(dx)$$

для всякой пары $\{f,\ g\}$ векторов $f,\ g \in L^2(S,\ \mathfrak{B},\ m)$. (4)

Условие (4) называется *гипотезой перемешивания* для марковского процесса $P(t,\ x,\ E)$. По аналогии со случаем эргодической гипотезы последнее предположение можно интерпретировать следующим образом: *всякая часть множества S в течение достаточно долгого промежутка времени переносится равномерно в любую другую часть S*. По поводу примеров отображений $x\to y_t(x)$, сохраняющих меру и удовлетворяющих условию перемешивания, мы отсылаем читателя к упоминавшейся ранее книге Э. Хопфа.

***H*-теорема.** Пусть $P(t,\ x,\ E)$ — марковский процесс с инвариантной мерой m на $(S,\ \mathfrak{B},\ m)$, такой, что $m(S)=1$. Рассмотрим функцию

$$H(z)=-z\ln z,\quad z\geqslant 0. \tag{5}$$

Может быть доказана следующая

Теорема (Иосида [17]). Пусть неотрицательная функция $f(x)\in L^1(S,\ \mathfrak{B},\ m)$ удовлетворяет неравенству $\int_S f(x)\ln^+ f(x)\,m(dx)<\infty$, где $\ln^+|z|$ равен $\ln|z|$ при $|z|\geqslant 1$ и нулю при $|z|<1$ (в этом случае говорят, что $f(x)$ принадлежит *классу Зигмунда*). Тогда

$$\int_S H(f(x))\,m(dx)\leqslant\int_S H((T_t f)(x))\,m(dx). \tag{6}$$

Доказательство. Так как для функции $H(z)=-z\ln z$ имеем $H''(z)=-\frac{1}{z}<0$ при $z>0$, то она является вогнутой. Поэтому

$$\int_S P(t,\ x,\ dy)\,H(f(y))\leqslant H\left(\int_S P(t,\ x,\ dy)\,f(y)\right),$$

т. е. среднее от $H(f(x))$ с весом $P(t,\ x,\ dy)$ не превосходит значения $H(z)$ при z, равном взвешенному среднему от $f(x)$. Интегрируя полученное неравенство относительно меры $m(dx)$ и учитывая инвариантность меры $m(E)$, мы и получаем (6).

Замечание. Из полугруппового свойства $T_{t+s}=T_tT_s$ и неравенства (6) без труда выводится соотношение

$$\int_S H\left((T_{t_1}f)(x)\right)m(dx)\leqslant\int_S H\left((T_{t_2}f)(x)\right)m(dx)\ \text{при любых}\ t_1<t_2, \tag{6'}$$

которое можно рассматривать как аналог классической *Н-теоремы* статистической механики.