4. Эргодическое разложение марковского процесса с локально бикомпактным фазовым пространством

Допустим, что S — некоторое сепарабельное метрическое пространство, ограниченные замкнутые подмножества которого бикомпактны. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех бэровских подмножеств S и рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ на $(S, \mathfrak{B})$. Допустим, что

$$\text{если } f(x) \in C_0^0(S), \text{ то и } f_t(x) = \int_S P(t, x, dy) f(y) \in C_0^0(S). \tag{1}$$

Целью этого параграфа является разложение пространства S на так называемые *эргодическую часть* и *диссипативную часть*. Это разложение можно рассматривать как обобщение результатов Крылова — Боголюбова, относящихся к детерминированному обратимому процессу переноса в бикомпактном метрическом пространстве S (см. Крылов — Боголюбов [1]). Возможность такого обобщения для бикомпактного метрического пространства S при условии (1) была указана в работе Иосида [17], и это обобщение было получено независимо М. Бебутовым [1]. Распространение результатов на случай локально бикомпактного пространства S было дано К. Иосида [19]. Мы будем следовать последней цитированной работе.

Лемма 1. Допустим, что некоторый линейный функционал $L(f)$, определенный на нормированном линейном пространстве $C_0^0(S)$ с нормой $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$, *неотрицателен* в том смысле, что при $f(x) \geqslant 0$ на множестве S выполняется неравенство $L(f) \geqslant 0$. Тогда $L(f)$ можно представить в виде

$$L(f) = \int_S f(x) \varphi(dx) \qquad \text{при всех } f \in C_0^0(S) \tag{2}$$

с помощью единственным образом определенной меры $\varphi(E)$, которая σ-аддитивна, неотрицательна для любых бэровских подмножеств E пространства S и удовлетворяет *условию регулярности*

$$\varphi(E) = \inf_G \varphi(G), \quad \text{где } G \supseteq E \text{ — произвольное открытое множество.} \tag{3}$$

Доказательство. Мы отсылаем читателя к книге Халмоша [1].

Неотрицательную σ-аддитивную регулярную меру $\varphi(E)$, определенную на семействе $\mathfrak{B}$ и удовлетворяющую условию $\varphi(S) \leqslant 1$, мы будем называть сейчас *инвариантной мерой* марковского процесса, если

$$\varphi(E) = \int_S \varphi(dx) P(t, x, E) \quad \text{для всех } t > 0 \text{ и } E \in \mathfrak{B}. \tag{4}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. Для любой функции $f \in C_0^0(S)$ и произвольной инвариантной меры $\varphi(E)$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f^*(x) \qquad \left(f_k(x) = \int_S P(k, x, dy) f(y)\right) \tag{5}$$

существует φ-п. в. и

$$\int_S f^*(x)\,\varphi(dx) = \int_S f(x)\varphi(dx). \tag{6}$$

Утверждение этой леммы следует непосредственно из теоремы 6 предыдущего параграфа.

Допустим теперь, что некоторая последовательность ${}_1f, {}_2f, {}_3f, \ldots$ плотна в нормированном линейном пространстве $C_0^0(S)$. Существование такой последовательности гарантируется предположением, сделанным относительно пространства S. Применяя лемму 2 к последовательности ${}_1f, {}_2f\ {}_3f, \ldots$ и объединяя все множества φ-меры нуль, на которых условия вида (5) не выполняются, мы можем построить такое множество N нулевой φ-меры, что

для всякого $x \notin N$ и любой функции $f \in C_0^0(S)$ существует

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f^*(x). \tag{7}$$

Мы будем говорить, что бэровскому множеству $S' \subseteq S$ соответствует *максимальная вероятность*, если $\varphi(S - S') = 0$ для всякой инвариантной меры φ. Из предыдущего ясно, что таким свойством будет обладать множество S' всех значений x, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ существует при любом выборе функции $f \in C_0^0(S)$. Следовательно, если существует такая инвариантная мера, что $\varphi(S) > 0$, то найдутся некоторый элемент $g \in C_0^0(S)$ и такая точка x_0, что

$$g^{**}(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g_k(x_0) > 0. \tag{8}$$

В самом деле, если допустить противное, то $f^*(x) = 0$ на множестве S для всех $f \in C_0^0(S)$, и тогда, согласно (6), $\int\limits_S f(x)\varphi(dx) = 0$.

Допустим теперь, что для некоторой функции $g \in C_0^0(S)$ в какой-либо точке x_0 выполняется условие (8). Предположим, что подпоследовательность $\{n'\}$ ряда натуральных чисел выбрана таким образом, что $\lim_{n'\to\infty} (n')^{-1} \sum_{k=1}^{n'} g_k(x_0) = g^{**}(x_0)$. Применяя диагональный метод, мы можем выбрать из $\{n'\}$ такую последовательность $\{n''\}$, что $\lim_{n''\to\infty} (n'')^{-1} \sum_{k=1}^{n''} ({}_jf)_k(x_0)$ будет существовать для значений $j = 1, 2, \ldots$. Ввиду плотности последовательности $\{{}_jf\}$ в пространстве $C_0^0(S)$ мы замечаем, что

$$\text{для всякой функции } f \in C_0^0(S) \text{ существует}$$
$$\lim_{n''\to\infty} (n'')^{-1} \sum_{k=1}^{n''} f_k(x_0) = f^{***}(x_0).$$

Если мы теперь положим $f^{***}(x_0) = L_{x_0}(f)$, то

$$L_{x_0}(f) = L_{x_0}(f_1). \tag{9}$$

В самом деле, из условия (1) следует, что $f_1 \in C_0^0(S)$, и поэтому

$$L_{x_0}(f) = \lim_{n''\to\infty} (n'')^{-1} \sum_{k=1}^{n''} f_{k+1}(x_0) = f_1^{***}(x_0) = L_{x_0}(f_1).$$

По лемме 1 существует такая регулярная мера $\varphi_{x_0}(E)$, что

$$L_{x_0}(f) = f^{***}(x_0) = \int_S f(x)\,\varphi_{x_0}(dx). \tag{10}$$

При этом, конечно,

$$0 \leqslant \varphi_{x_0}(E) \leqslant 1, \tag{11}$$

и поэтому ввиду (9)

$$\int_S f(x)\,\varphi_{x_0}(dx) = \int_S \left(\int_S P(1,\ x,\ dy)\,f(y)\right)\varphi_{x_0}(dx).$$

Пусть теперь функция $f(x)$ стремится к характеристической функции бэровского множества E, тогда, как нетрудно видеть, $\varphi_{x_0}(E)$ оказывается инвариантной мерой. Ввиду (8) и (10) $L_{x_0}(g) = g^{***}(x_0) = \int_S g(x)\,\varphi_{x_0}(dx) > 0$, и поэтому $\varphi_{x_0}(S) > 0$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Для того чтобы не существовало никаких инвариантных мер, кроме тривиальной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f^*(x) = 0 \quad \text{на } S \text{ для всякого } \quad f \in C_0^0(S). \tag{12}$$

Определение. Марковский процесс $P(t,\ x,\ E)$, определенный в $(S,\ \mathfrak{B})$ и удовлетворяющий условию (12), мы назовем *диссипативным*.

Пример. Возьмем в качестве пространства S полупрямую $(0, \infty)$ и пусть $\mathfrak{B}$ — семейство всех бэровских подмножеств из промежутка $(0, \infty)$. Тогда равенства

$$P(t, x, E)=1 \text{ при } (x+t)\in E, \quad P(t, x, E)=0, \text{ когда } (x+t)\notin E,$$

определяют диссипативный марковский процесс $P(t, x, E)$.

Обратимся теперь к случаю, когда процесс $P(t, x, E)$ не диссипативен. Пусть

$$D=\left\{x\in S;\ f^*(x)=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=0 \quad \text{для всех} \quad f\in C_0^0(S)\right\}.$$

Так как это множество совпадает с

$$\{x\in S;\ ({}_jf)^*(x)=0 \text{ при } j=1, 2, \ldots\},$$

то оно является бэровским множеством. Назовем D *диссипативной частью* S. Мы покажем ниже, что $\varphi(D)=0$ для всякой инвариантной меры φ, и поэтому, поскольку процесс $P(t, x, E)$ предполагается не диссипативным, множество $S_0=S-D$ не пусто. Мы уже знаем, что найдется бэровское множество $S_1\subseteq S_0$ максимальной вероятности, такое, что

всякой точке $x\in S_1$ соответствует некоторая нетривиальная инвариантная мера $\varphi_x(E)$, такая, что $f^*(x)=$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=\int_{S_1} f(y)\varphi_x(dy)=\int_{S_1} f^*(y)\varphi_x(dy). \tag{13}$$

Для любой инвариантной меры φ выполняется равенство (6), и поэтому ввиду (13)

$$\int_{S_1} f(y)\varphi(dy)=\int_{S_1}\left(\int_{S_1} f(z)\varphi_y(dz)\right)\varphi(dy).$$

Мы приходим, таким образом, к соотношению

$$\varphi(E)=\int_{S_1}\varphi_y(E)\varphi(dy). \tag{14}$$

Тем самым установлена

Теорема 2. Всякая инвариантная мера φ может быть представлена в виде выпуклой комбинации инвариантных мер $\varphi_y(E)$ (здесь y рассматривается как параметр).

С помощью (11) и (14) мы заключаем, что

$$S_2=\{x\in S;\ x\in S_1,\ \varphi_x(S_1)=1\}$$

является множеством максимальной вероятности.

Для всякой функции $f \in C_0^0(S)$ и любой инвариантной меры φ имеет место равенство

$$\int_{S_2} \varphi(dx)\left(\int_{S_2} (f^*(y)-f^*(x))^2 \varphi_x(dy)\right)=0, \tag{15}$$

так как левая часть равна здесь выражению

$$\int_{S_2} \varphi(dx)\left(\int_{S_2} f^*(y)^2 \varphi_x(dy)\right) - 2\int_{S_2} f^*(x)\varphi(dx)\left(\int_{S_2} f^*(y)\varphi_x(dy)\right) +$$
$$+\int_{S_2} f^*(x)^2\varphi(dx)\cdot\int_{S_2}\varphi_x(dy) = \int_{S_2} f^*(y)^2\varphi(dy) -$$
$$-2\int_{S_2} f^*(x)^2\varphi(dx) + \int_{S_2} f^*(x)^2\varphi(dx) = 0,$$

поскольку $S_2 = \{x \in S;\ x \in S_1,\ \varphi_x(S_1)=1\}$ и справедливы условия (13), (14) и (6). Применяя (15) к последовательности ${}_1f$, ${}_2f$, ${}_3f$, ..., мы видим, что

$$S_3 = \left\{x \in S_2;\ \int_{S_2} (f^*(y)-f^*(x))^2\varphi_x(dy)=0 \quad \text{для всех} \quad f \in C_0^0(S)\right\}$$

является множеством максимальной вероятности.

Мы можем теперь установить так называемое *эргодическое разложение* S. Положим для любого $x \in S_3$

$$E_x = \{y \in S_3;\ f^*(y) = f^*(x) \quad \text{для всех} \quad f \in C_0^0(S)\}. \tag{16}$$

Мы можем теперь доказать, что всякое множество вида E_x содержит некоторое множество $\hat{E}_x$, обладающее следующим свойством:

$$\varphi_x(E_x) = \varphi_x(\hat{E}_x) \quad \text{и} \quad P(1,\ y,\ \hat{E}_x)=1 \quad \text{при всяком} \quad y \in \hat{E}_x. \tag{17}$$

Доказательство. Из определения множества S_3 видно, что $f^*(y)=f^*(x)$, если вариация меры $\varphi_x(E)$ в точке y отлична от нуля. Следовательно, $\varphi_x(E_x)=\varphi_x(S_3)=1$. Таким образом, вследствие инвариантности меры φ_x мы получаем

$$1=\varphi_x(E_x) = \int_{S_3} P(1,\ z,\ E_x)\varphi_x(dz) = \int_{E_x} P(1,\ z,\ E_x)\varphi_x(dz).$$

Так как $0 \leqslant P(1,\ z,\ E_x) \leqslant 1$, то существует бэровское множество $E^1 \subseteq E_x$, такое, что

$$\text{если } \varphi_x(E^1)=\varphi_x(E_x) \quad \text{и} \quad z \in E^1, \quad \text{то} \quad P(1,\ z,\ E_x)=1.$$

Положим теперь

$$E^2 = \{z \in E^1;\ P(1,\ z,\ E^1)=1\}.$$

Ввиду того что

$$\int_{E^1} P(1, z, E^1)\varphi_x(dz) = \varphi_x(E^1) = \varphi_x(E_x) = \int_{E^1} P(1, z, E_x)\varphi_x(dz),$$

должно выполняться равенство

$$\int_{E^1} (P(1, z, E_x) - P(1, z, E^1))\varphi_x(dz) = 0.$$

Если $z \in E^2$, то по определению E^2 выполняется равенство $P(1, z, E^1) = 1$, и мы, таким образом, находим, что $\varphi_x(E^1 - E^2) = 0$.

Рассмотрим теперь множество

$$E^3 = \{z \in E^2;\ P(1, z, E^2) = 1\}.$$

Тогда, как и выше, доказывается, что $\varphi_x(E^3) = \varphi_x(E_x)$. Продолжая этот процесс, мы построим такую последовательность множеств $\{E^n\}$, что

$$E_x \supseteq E^1 \supseteq E^2 \supseteq \ldots, \qquad \varphi_x(E^n) = \varphi_x(E_x),$$

$$\text{и } P(1, z, E^n) = 1, \quad \text{если } z \in E^{n+k} \quad (n \geqslant 0,\ k \geqslant 1,\ E^0 = E).$$

В результате мы можем построить множество $\hat{E}_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^n$, которое и будет обладать нужными свойствами.

Мы, таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Переходная функция $P(t, y, E)$ определяет на всяком множестве вида $\hat{E}_x$ марковский процесс, который *эргодичен* в следующем смысле:

$$\begin{gathered}\hat{E}_x \text{ нельзя разложить на две части } A \text{ и } B, \text{ такие, что} \\ \varphi(A)\cdot\varphi(B) > 0 \text{ для какой-либо инвариантной меры } \varphi \\ \text{и } P(1, a, B) = 0 \text{ при } a \in A,\ P(1, b, A) = 0, \text{ если } b \in B.\end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. Пусть φ — произвольная инвариантная мера в $\hat{E}_x$, удовлетворяющая условию $\varphi(\hat{E}_x) = 1$. Тогда на основании (14) мы заключаем, что $\varphi(E) = \int_{\hat{E}_x} \varphi(dz)\varphi_z(E)$ при любом $E \subseteq \hat{E}_x$. Так как по определению $\hat{E}_x$ для любой точки $z \in \hat{E}_x$ выполняется равенство $\varphi_z(E) = \varphi_x(E)$, то

$$\varphi(E) = \varphi_x(E) \int_{\hat{E}_x} \varphi(dz) = \varphi_x(E).$$

Таким образом, на $\hat{E}_x$ может быть определена лишь одна-единственная инвариантная мера $\varphi_x(E)$. Отсюда и вытекает эргодичность, выражаемая свойством (18). Действительно, допустим, что $\hat{E}_x$ может быть разбито на две части, удовлетворяющие соответствующим требованиям, в противоположность тому, что утверждает (18). Тогда вследствие инвариантности меры φ

$$\varphi(C) = \int_{\hat{E}_x} P(1, z, C)\varphi(dz) \quad \text{при любом} \quad C \subseteq \hat{E}_x.$$

Определим теперь меру ψ условием

$$\psi(C) = \begin{cases} \varphi(C)/\varphi(A) & \text{при} \quad C \subseteq A, \\ 0 & \text{при} \quad C \subseteq B. \end{cases}$$

Тогда мера ψ окажется, как нетрудно видеть, инвариантной на $\hat{E}_x$, что противоречит однозначной определенности меры φ.

5. Броуновское движение в однородном римановом пространстве

Существует интересная взаимосвязь между марковскими процессами и дифференциальными уравнениями. Уже в начале тридцатых годов А. Н. Колмогоров доказал, что при выполнении некоторых условий регулярности, относящихся к переходной функции $P(t, x, E)$, функция

$$u(t, x) = \int_S P(t, x, dy) f(y)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению типа *уравнения диффузии*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv Au, \quad t > 0, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор A эллиптичен по отношению к локальным координатам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точки x фазового пространства S. Мы применяем здесь и далее эйнштейновские сокращенные обозначения, принятые в тензорном исчислении; например, запись $a^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ означает $\sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. По поводу вывода уравнения (1) мы отсылаем читателя к работе А. Н. Колмогорова [1]. Основная идея этой работы связана с изучением локальных характеристик марковских процессов.