Таким образом, на $\hat{E}_x$ может быть определена лишь одна-единственная инвариантная мера $\varphi_x(E)$. Отсюда и вытекает эргодичность, выражаемая свойством (18). Действительно, допустим, что $\hat{E}_x$ может быть разбито на две части, удовлетворяющие соответствующим требованиям, в противоположность тому, что утверждает (18). Тогда вследствие инвариантности меры φ

$$\varphi(C) = \int_{\hat{E}_x} P(1, z, C)\,\varphi(dz) \quad \text{при любом} \quad C \subseteq \hat{E}_x.$$

Определим теперь меру ψ условием

$$\psi(C) = \begin{cases} \varphi(C)/\varphi(A) & \text{при} \quad C \subseteq A, \\ 0 & \text{при} \quad C \subseteq B. \end{cases}$$

Тогда мера ψ окажется, как нетрудно видеть, инвариантной на $\hat{E}_x$, что противоречит однозначной определенности меры φ.

5. Броуновское движение в однородном римановом пространстве

Существует интересная взаимосвязь между марковскими процессами и дифференциальными уравнениями. Уже в начале тридцатых годов А. Н. Колмогоров доказал, что при выполнении некоторых условий регулярности, относящихся к переходной функции $P(t, x, E)$, функция

$$u(t, x) = \int_S P(t, x, dy)\,f(y)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению типа *уравнения диффузии*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + a^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv Au, \quad t > 0, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор A эллиптичен по отношению к локальным координатам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точки x фазового пространства S. Мы применяем здесь и далее эйнштейновские сокращенные обозначения, принятые в тензорном исчислении; например, запись $a^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ означает $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. По поводу вывода уравнения (1) мы отсылаем читателя к работе А. Н. Колмогорова [1]. Основная идея этой работы связана с изучением локальных характеристик марковских процессов.

Следуя идеям работы Хилле, представленной на Скандинавском конгрессе 1949 г. (см. также Хилле [9]) и исследованию Иосида [29] 1948 г., Феллер [2] начал в 1952 г. систематическую разработку этого нового направления в теории вероятностей, используя результаты аналитической теории полугрупп. Его исследования были продолжены Дынкиным [1], [2], К. Ито—Мак-Кином [1], Рэем [1], Хантом [1], Юшкевичем [1], Маруяма [1] и многими молодыми исследователями, в особенности в Японии, СССР и США. Результаты этих исследований составляют содержание так называемой *теории диффузионных процессов*. В настоящее время находится в печати книга К. Ито — Мак-Кина [1], посвященная изложению этой теории[1]). Мы приведем здесь обзор наиболее характерных аспектов этой теории, относящихся главным образом к аналитическим методам.

Рассмотрим локально бикомпактное пространство S, и пусть $\mathfrak{B}$ — совокупность всех бэровских множеств из S. Для того чтобы определить понятие так называемой *однородности в пространстве* марковского процесса $P(t, x, E)$, определенного в пространстве S, мы предположим, что S представляет собой n-мерное ориентированное связное риманово пространство класса C^{∞}, такое, что полная группа $\mathfrak{G}$ *изометрических преобразований* S на себя, которая является группой Ли, транзитивна на S. Последнее означает, что для каждой пары $\{x, y\}$ точек $x, y \in S$ существует некоторое изометрическое преобразование $M \in \mathfrak{G}$, такое, что $M \cdot x = y$. В этом случае процесс $P(t, x, E)$ называется *однородным в пространстве*, если

$$P(t, x, E) = P(t, M \cdot x, M \cdot E) \text{ для всех } x \in S, \ E \in \mathfrak{B} \text{ и } M \in \mathfrak{G}. \tag{2}$$

Однородный во времени и в пространстве марковский процесс, определенный на S, называется *броуновским движением* на S, если выполняется следующее *условие непрерывности линдеберговского типа*:

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x, y) > \varepsilon} P(t, x, dy) = 0 \quad \text{при любых} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad x \in S. \tag{3}$$

Предложение. Рассмотрим B-пространство $C(S)$ всех ограниченных и равномерно непрерывных функций $f(x)$, определенных в S, с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x} |f(x)|$. Определим семейство операторов $\{T_t\}$ с помощью условия

$$(T_t f)(x) = \begin{cases} \int\limits_S P(t, x, dy) f(y) & \text{при} \quad t > 0, \\ f(x) & \text{при} \quad t = 0. \end{cases} \tag{4}$$

---

[1]) Английское издание этой книги вышло в свет; русский перевод находится в печати. — *Прим. перев.*

Тогда семейство $\{T_t\}$ образует в пространстве $C(S)$ сжимающую полугруппу класса (C_0).

Доказательство. Из условий $P(t, x, E) \geqslant 0$ и $P(t, x, S) = 1$ мы находим, что операторы T_t положительны и

$$|(T_t f)(x)| \leqslant \sup_y |f(y)|.$$

Полугрупповое свойство $T_{t+s} = T_t T_s$ непосредственно следует из уравнения Чепмена — Колмогорова. Если мы теперь определим линейный оператор M' соотношением $(M'f)(x) = f(M \cdot x)$, $M \in \mathfrak{G}$, то оказывается, что

$$T_t M' = M' T_t, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

В самом деле,

$$(M'T_t f)(x) = (T_t f)(M \cdot x) = \int_S P(t, M \cdot x, dy) f(y) =$$

$$= \int_S P(t, M \cdot x, d(M \cdot y)) f(M \cdot y) = \int_S P(t, x, dy) f(M \cdot y) = (T_t M' f)(x).$$

Возьмем произвольно две точки x и x', и пусть преобразование $M \in \mathfrak{G}$ таково, что $M \cdot x = x'$; тогда

$$(T_t f)(x) - (T_t f)(x') = (T_t f)(x) - (M'T_t f)(x) = T_t(f - M'f)(x).$$

Следовательно, выражение $(T_t f)(x)$ равномерно непрерывно и ограничено, так как функция $f(x)$ по предположению равномерно непрерывна.

Для того чтобы доказать сильную непрерывность оператора T_t по t, достаточно, согласно теореме из гл. IX, § 1, проверить тот факт, что T_t слабо непрерывен справа в точке $t = 0$. Поэтому достаточно показать, что равномерно относительно x существует $\lim_{t \downarrow 0} (T_t f)(x) = f(x)$. Запишем неравенства

$$|(T_t f)(x) - f(x)| = \left| \int_S P(t, x, dy)[f(y) - f(x)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{d(x, y) \leqslant \varepsilon} P(t, x, dy)[f(y) - f(x)] \right| +$$

$$+ \left| \int_{d(x, y) > \varepsilon} P(t, x, dy)[f(y) - f(x)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{d(x, y) \leqslant \varepsilon} P(t, x, dy)[f(y) - f(x)] \right| + 2\|f\| \int_{d(x, y) > \varepsilon} P(t, x, dy).$$

Первый член в правой части этого неравенства равномерно по x стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$, а второй член при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ стремится к нулю при $t \downarrow 0$ равномерно относительно x. Последнее утверждение с очевидностью вытекает из условия (3) и требования однородности рассматриваемого процесса в пространстве. Таким образом, действительно $\lim\limits_{t \downarrow 0} (T_t f)(x) = f(x)$ существует и равномерен по x.

Теорема. Выберем произвольно некоторую точку x_0 пространства S. Рассмотрим группу $\mathfrak{G}_0 = \{M \in \mathfrak{G};\ M \cdot x_0 = x_0\} \subseteq \mathfrak{G}$ так называемых *изотропных преобразований*. Предположим, что группа $\mathfrak{G}_0$ бикомпактна. По известной теореме Э. Картана замкнутая подгруппа группы Ли является также группой Ли, поэтому подгруппа $\mathfrak{G}_0$ группы $\mathfrak{G}$ образует группу Ли. Пусть A — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы T_t. При указанных здесь условиях имеют место следующие результаты.

1. Если $f \in D(A) \cap C^2(S)$, то в системе координат $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$, соответствующей окрестности точки x_0,

$$(Af)(x_0) = a^i(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_0^i} + b^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i \partial x_0^j}, \tag{6}$$

где

$$a^i(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{d(x_0, x_i) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i) P(t, x_0, dx), \tag{7}$$

$$b^{ij}(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{d(x_0, x) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) P(t, x_0, dx), \tag{8}$$

и эти пределы существуют независимо от выбора ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$.

2. Множество $D(A) \cap C^2(S)$ „велико" в том смысле, что для любой функции $h(x)$ класса C^∞ с бикомпактным носителем существует некоторая функция $f(x) \in D(A) \cap C^2(S)$, такая, что значения $f(x_0)$, $\partial f / \partial x_0^i$, $\partial^2 f / \partial x_0^i \partial x_0^j$ сколь угодно близки соответственно к $h(x_0)$, $\partial h / \partial x_0^i$, $\partial^2 h / \partial x_0^i \partial x_0^j$.

Доказательство. *Первый этап.* Пусть функция $h(x)$ с бикомпактным носителем принадлежит классу C^∞. Если $f \in D(A)$, то „свертка"

$$(f \otimes h)(x) = \int\limits_{\mathfrak{G}} f(M_y \cdot x) h(M_y \cdot x_0) dy \tag{9}$$

принадлежит классу C^∞ и входит в область $D(A)$ (здесь M_y обозначает элемент общего вида группы $\mathfrak{G}$, а dy — некоторая фиксированная правоинвариантная мера Хаара, определенная на $\mathfrak{G}$ и удовлетворяющая условию $dy = d(y \cdot M)$ при любом $M \in \mathfrak{G}$). Написанный выше интеграл существует, потому что группа $\mathfrak{G}_0$ изотропных преобразований бикомпактна, а функция h обладает бикомпактным носителем.

Ввиду равномерной непрерывности f и бикомпактности носителя функции h мы можем аппроксимировать интеграл (9) равномерно относительно x римановыми суммами вида $\sum_{i=1}^{k} f(M_{y_i} \cdot x) C_i$:

$$(f \otimes h)(x) = s\text{-}\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} f(M_{y_i} \cdot x) C_i.$$

Поскольку $T_t M' = M' t_t$, оператор M' коммутирует с A, т. е. из $f \in D(A)$ следует, что $M'f \in D(A)$ и $AM'f = M'Af$. Полагая $g(x) = (Af)(x)$, мы видим, что $g \in C(S)$ и

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} f(M_{y_i} \cdot x) C_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (AM'_{y_i} \cdot f)(x) C_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (M'_{y_i} Af)(x) C_i = \sum_{i=1}^{k} g(M_{y_i} \cdot x) C_i,$$

причем правая часть — выражение $\sum_{i=1}^{k} g(M_{y_i} \cdot x) C_i$ — стремится при $k \to \infty$ к величине $(g \otimes h)(x) = (Af \otimes h)(x)$. Ввиду замкнутости инфинитезимального порождающего оператора A свертка $f \otimes h \in D(A)$ и $A(f \otimes h) = Af \otimes h$. Так как $S = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, то можно найти такую координатную окрестность U точки x_0, что для всякого $x \in U$ будет существовать некоторый элемент $M = M(x) \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

1. $M(x) \cdot x = x_0$.
2. Выражение $M(x) \cdot x_0$ аналитически зависит от координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ точки $x \in S$.

Эти утверждения вытекают из того факта, что множество $\{M_y \in \mathfrak{G};\ M_y \cdot x = x_0\}$, представляющее собой один из смежных классов группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе Ли $\mathfrak{G}_0$, образует в $\mathfrak{G}$ аналитическое подмногообразие. Следовательно, поскольку мера dy правоинвариантна,

$$(f \otimes h)(x) = \int_{G} f(M_y M(x) x) h(M_y M(x) x_0) dy =$$

$$= \int_{G} f(M_y \cdot x_0) h(M_y M(x) \cdot x_0) dy.$$

Правая часть последнего соотношения бесконечно дифференцируема в окрестности x_0 и

$$D_x^s (f \otimes h)(x) = \int_{G} f(M_y \cdot x_0) D_x^s h(M_y M(x) \cdot x_0) dy. \qquad (10)$$

Второй этап. Учитывая, что множество $D(A)$ плотно в $C(S)$, и выбирая соответствующим образом f и h, мы приходим к заключению, что

существуют функции $F^1(x), F^2(x), \ldots, F^n(x) \in D(A)$ класса C^∞, такие, что якобиан $\dfrac{\partial(F^1(x), \ldots, F^n(x))}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} > 0$ в точке x_0, (11)

и при этом

найдется некоторая функция $F_0(x) \in D(A)$ класса C^∞, удовлетворяющая неравенству

$$\left(x^i - x_0^i\right)\left(x^j - x_0^j\right)\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0^i \partial x_0^j} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left(x^i - x_0^i\right)^2. \tag{12}$$

Функции $F^1(x), F^2(x), \ldots, F^n(x)$ мы можем использовать как координаты в некоторой окрестности вида $\{x;\ \operatorname{dis}(x_0, x) < \varepsilon\}$ точки x_0. Обозначим эти новые локальные координаты через $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Так как $F^j(x) \in D(A)$, то

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_S P(t, x_0, dx)(F^j(x) - F^j(x_0)) = (AF^j)(x_0) =$$
$$= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{\operatorname{dis}(x, x_0) \leqslant \varepsilon} P(t, x_0, dx)(F^j(x) - F^j(x_0))$$

независимо от выбора ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ — это вытекает из условия Линдеберга (3). Следовательно, для координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ $(x^j = F^j)$ существует конечный

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{\operatorname{dis}(x, x_0) \leqslant \varepsilon} \left(x^j - x_0^j\right) P\left(t, x_0, dx\right) = a^j\left(x_0\right), \tag{13}$$

не зависящий от ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$. Используя условие Линдеберга (3) еще раз и учитывая, что $F_0 \in D(A)$, получаем

$$(AF_0)(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_S P(t, x_0, dx)(F_0(x) - F_0(x_0)) =$$
$$= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{\operatorname{dis}(x_0, x) \leqslant \varepsilon} P(t, x_0, dx)(F_0(x) - F_0(x_0)) =$$
$$= \lim_{t \downarrow 0} \left[t^{-1} \int_{\operatorname{dis}(x_0, x) \leqslant \varepsilon} \left(x^i - x_0^i\right) \frac{\partial F_0}{\partial x_0^i} P\left(t, x_0, dx\right) + \right.$$
$$\left. + t^{-1} \int_{\operatorname{dis}(x_0, x) \leqslant \varepsilon} \left(x^i - x_0^i\right)\left(x^j - x_0^j\right)\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{x = x_0 + \theta(x - x_0)} P(t, x_0, dx)\right],$$

где $0 < \theta < 1$. Первый член, стоящий в правой части последнего равенства, имеет предел, равный $a^i(x_0)\dfrac{\partial F_0}{\partial x_0^i}$. Поэтому ввиду положительности $P(t, x, E)$ и условия (12) мы заключаем, что

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x_0,\, x)\leqslant \varepsilon} \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)^2 P(t, x_0, dx) < \infty. \tag{14}$$

Третий этап. Пусть $f \in D(A) \cap C^2$. Используя степенное разложение для выражения $f(x) - f(x_0)$, мы получаем

$$\frac{(T_t f)(x_0) - f(x_0)}{t} = t^{-1} \int\limits_{S} (f(x) - f(x_0))\, P(t, x_0, dx) =$$

$$= t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x,\, x_0) > \varepsilon} (f(x) - f(x_0))\, P(t, x_0, dx) +$$

$$+ t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x,\, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i) \frac{\partial f}{\partial x_0^i} P(t, x_0, dx) +$$

$$+ t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x,\, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i \partial x_0^j} P(t, x_0, dx) +$$

$$+ t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x,\, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)\, C_{ij}(\varepsilon)\, P(t, x_0, dx) =$$

$$= C_1(t, \varepsilon) + C_2(t, \varepsilon) + C_3(t, \varepsilon) + C_4(t, \varepsilon),$$

где $C_{ij}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Из (3) следует, что $\lim\limits_{t\downarrow 0} C_1(t, \varepsilon) = 0$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ и что $\lim\limits_{t\downarrow 0} C_2(t, \varepsilon) = a^i(x_0) \dfrac{\partial f}{\partial x_0^i}$ независимо от ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Используя условие (14) и неравенство Шварца, мы устанавливаем, что имеет место ограниченная по $t > 0$ сходимость $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} C_4(t, \varepsilon) = 0$. Левая часть рассматриваемого равенства имеет при $t \downarrow 0$ конечный предел $(Af)(x_0)$. Поэтому разность

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, C_3(t, \varepsilon) - \underline{\lim_{t\downarrow 0}}\, C_3(t, \varepsilon)$$

может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно малые $\varepsilon > 0$. Но из (14), (3) и неравенства Шварца вытекает, что эта разность не зависит от ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, независимо от ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\downarrow 0} C_3(t, \varepsilon)$. Поскольку мы можем выбрать функцию $F \in D(A) \cap C^\infty(S)$ так, чтобы производные $\partial^2 F/\partial x_0^i \partial x_0^j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ были сколь угодно близки к произвольно выбранным константам α_{ij}, то, применяя рассуждения, аналогичные использованным выше, мы устанавливаем, что существует конечный

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{\mathrm{dis}(x,\, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) P(t,\ x_0,\ dx) = b^{ij}(x_0), \tag{15}$$

и

$$\lim_{t \downarrow 0} C_3(t,\ \varepsilon) = b^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i \partial x_0^j}.$$

Тем самым доказательство теоремы завершено.

Замечание. Формулировка и доказательство приведенной выше теоремы взяты из работы Иосида [20]. Следует заметить, что $b^{ij}(x) = b^{ji}(x)$ и

$b^{ij}(x_0)\xi_i\xi_j \geqslant 0$ для всякого вещественного вектора $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$, так как

$$(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)\xi_i\xi_j = \left(\sum_{i=1}^{n}(x^i - x_0^i)\xi_i\right)^2. \tag{16}$$

Броуновское движение на поверхности трехмерной сферы. В частном случае, когда пространство S есть поверхность трехмерной сферы S^3 и группа $\mathfrak{G}$ является группой вращений S^3, инфинитезимальный производящий оператор A полугруппы, индуцированной броуновским движением на поверхности S, имеет, как можно показать, вид

$A = C\Lambda$, где C — некоторая положительная постоянная,

а Λ — лапласиан на поверхности S^3:

$$\Lambda = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{17}$$

По существу, таким образом, имеется лишь одно броуновское движение, определенное на поверхности S^3. Подробнее по этому вопросу см. Иосида [27].

6. *Обобщенный лапласиан (Феллер)*

Пусть, в частности, S — некоторый открытый интервал $(r_1,\ r_2)$ вещественной прямой (конечный или бесконечный) и $\mathfrak{B}$ — семейство всех бэровских множеств из $(r_1,\ r_2)$. Рассмотрим определенный на $(S,\ \mathfrak{B})$ марковский процесс $P(t,\ x,\ E)$, удовлетворяющий условию Линдеберга вида

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{|x-y| > \varepsilon} P(t,\ x,\ dy) = 0 \quad \text{при всех } x,\ y \in (r_1,\ r_2) \text{ и } \varepsilon > 0. \tag{1}$$