зованным выше, мы устанавливаем, что существует конечный

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{\operatorname{dis}(x, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) P(t, x_0, dx) = b^{ij}(x_0), \tag{15}$$

и

$$\lim_{t \downarrow 0} C_3(t, \varepsilon) = b^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i \partial x_0^j}.$$

Тем самым доказательство теоремы завершено.

Замечание. Формулировка и доказательство приведенной выше теоремы взяты из работы Иосида [20]. Следует заметить, что $b^{ij}(x) = b^{ji}(x)$ и

$b^{ij}(x_0)\xi_i\xi_j \geqslant 0$ для всякого вещественного вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, так как

$$(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)\xi_i\xi_j = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)\xi_i\right)^2. \tag{16}$$

Броуновское движение на поверхности трехмерной сферы. В частном случае, когда пространство S есть поверхность трехмерной сферы S^3 и группа $\mathfrak{G}$ является группой вращений S^3, инфинитезимальный производящий оператор A полугруппы, индуцированной броуновским движением на поверхности S, имеет, как можно показать, вид

$A = C\Lambda$, где C — некоторая положительная постоянная,

а Λ — лапласиан на поверхности S^3:

$$\Lambda = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{17}$$

По существу, таким образом, имеется лишь одно броуновское движение, определенное на поверхности S^3. Подробнее по этому вопросу см. Иосида [27].

6. Обобщенный лапласиан (Феллер)

Пусть, в частности, S — некоторый открытый интервал (r_1, r_2) вещественной прямой (конечный или бесконечный) и $\mathfrak{B}$ — семейство всех бэровских множеств из (r_1, r_2). Рассмотрим определенный на $(S, \mathfrak{B})$ марковский процесс $P(t, x, E)$, удовлетворяющий условию Линдеберга вида

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{|x-y| > \varepsilon} P(t, x, dy) = 0 \quad \text{при всех } x, y \in (r_1, r_2) \text{ и } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Обозначим через $C[r_1, r_2]$ B-пространство вещественных ограниченных равномерно непрерывных функций $f(x)$, определенных в (r_1, r_2), с нормой $\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$. Тогда равенства

$$\begin{aligned} (T_t f)(x) &= \int\limits_{r_1}^{r_2} P(t, x, dy) f(y) \quad \text{при} \quad t > 0, \\ (T_t f)(x) &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

определяют в пространстве $C[r_1, r_2]$ некоторую сжимающую полугруппу положительных операторов $\{T_t\}$. Предположим, что в точке $t = 0$ оператор T_t слабо непрерывен справа, тогда по теореме гл. IX, § 1, $\{T_t\}$ является полугруппой класса (C_0). Приводимые ниже две теоремы Феллера касаются инфинитезимального производящего оператора A полугруппы T_t.

Теорема 1. Оператор A обладает следующими свойствами:

$$A \cdot 1 = 0, \tag{3}$$

A *локален* в том смысле, что если функция $f \in D(A)$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки x_0, то $(Af)(x_0) = 0$, (4)

если функция $f \in D(A)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, то $(Af)(x_0) \leqslant 0$. (5)

Доказательство. Свойство (3) вытекает из условия $T_t \cdot 1 = 1$. Из (1) следует, что независимо от достаточно малых значений $\varepsilon > 0$ справедливо предельное соотношение

$$(Af)(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{|x_0 - y| \leqslant \varepsilon} P(t, x_0, dy)(f(y) - f(x_0)).$$

Поэтому вследствие неравенства $P(t, x, E) \geqslant 0$ мы и приходим к условиям (4) и (5).

Теорема 2. Допустим, что линейный оператор A, заданный в некотором линейном подпространстве $D(A)$ пространства $C[r_1, r_2]$, отображающий $C[r_1, r_2]$ в себя, удовлетворяет условиям (3), (4) и (5). Предположим, кроме того, что оператор A *не вырождается* в том смысле, что имеют место следующие два свойства:

существует по крайней мере одна функция $f_0 \in D(A)$, такая, что $(Af_0)(x) > 0$ при всех $x \in (r_1, r_2)$, (6)

уравнение $A \cdot v = 0$ имеет решение v, линейно независимое от функции 1 во всяком подинтервале (x_1, x_2) интервала (r_1, r_2). (7)

Тогда уравнение $A \cdot s = 0$ имеет в (r_1, r_2) строго возрастающее решение $s = s(x)$, такое, что можно определить строго возрастающую (но не обязательно непрерывную или ограниченную) функцию $m = m(x)$, заданную на (r_1, r_2), вида

$$m(x) = \int^{x} \frac{1}{(Af_0)(t)}\, d\left(D_s^+ f_0(t)\right), \tag{8}$$

так, чтобы имело место представление

$$(Af)(x) = D_m^+ D_s^+ f(x) \text{ при } x \in (r_1, r_2) \text{ для любой функции } f \in D(A). \tag{9}$$

Здесь правые производные D_p^+, определенные относительно строго возрастающей функции $p = p(x)$, понимаются как выражения

$$D_p^+ g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{y \downarrow x} \dfrac{g(y+0) - g(x-0)}{p(y+0) - p(x-0)} & \text{в точках непрерывности } p, \\ \dfrac{g(x+0) - g(x-0)}{p(x+0) - p(x-0)} & \text{в точках разрыва } p. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. *Первый этап.* Пусть функция $u \in D(A)$ удовлетворяет уравнению $A \cdot u = 0$ и $u(x_1) = u(x_2)$, где $r_1 < x_1 < x_2 < r_2$. Тогда функция $u(x)$ должна обратиться в константу в промежутке (x_1, x_2). Действительно, если допустить противное, то мы придем к противоречию. В самом деле, предположим, например, что функция $u(x)$ достигает локального максимума в некоторой внутренней точке x_0 промежутка (x_1, x_2) (случай минимума исследуется аналогичным способом). Тогда найдется некоторое значение $\varepsilon > 0$, такое, что $u(x_0) - \varepsilon \geqslant u(x_1) = u(x_2)$. Возьмем какую-нибудь функцию $f_0 \in D(A)$, удовлетворяющую условию (6). Тогда при достаточно большом значении $\delta > 0$ функция $F(x) = f_0(x) + \delta u(x)$ будет удовлетворять неравенству $F(x_0) > F(x_i)$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, функция $F(x)$, определенная в сегменте $[x_1, x_2]$, будет иметь в некоторой внутренней точке x_0' максимум, в то время как $(AF)(x_0') = (Af_0)(x_0') > 0$, что противоречит условию (5).

Второй этап. На основании результатов первого этапа и условия (7) мы заключаем, что существует строго возрастающее непрерывное решение $s(x)$ уравнения $A \cdot s = 0$. С помощью этой функции s мы можем изменить параметризацию рассматриваемого интервала таким образом, чтобы

$$\text{обе функции } 1 \text{ и } x \text{ удовлетворяли уравнению } A \cdot f = 0 \tag{11}$$

(написанное условие будет выполняться в новых переменных, для которых сохранены прежние обозначения). Теперь мы можем показать, что

$$\begin{gathered}\text{если } (Ah)(x) > 0 \text{ для всех } x \text{ из подинтервала } (x_1, x_2) \\ \text{интервала } (r_1, r_2), \text{ то } h(x) \text{ выпукла вниз в } (x_1, x_2).\end{gathered} \tag{12}$$

Действительно, функция $u(x)=h(x)-\alpha x-\beta$, которая удовлетворяет неравенству $(Au)(x)=(Ah)(x)>0$ при всех x из (x_1, x_2), не может иметь локального максимума ни в какой внутренней точке промежутка (x_1, x_2).

Третий этап. Пусть $f\in D(A)$. Тогда из (12) и (6) следует, что для достаточно больших значений $\delta>0$ обе функции $f_1(x)=f(x)+\delta f_0(x)$ и $f_2(x)=\delta f_0(x)$ выпуклы вниз. Функция $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ как разность двух выпуклых функций должна обладать правой производной в каждой точке x промежутка (r_1, r_2). Положим

$$A\cdot f=\varphi,\quad A\cdot f_0=\varphi_0,\quad D_x^+f_0(x)=\mu(x). \tag{13}$$

Для функции $g_t=f-tf_0$ выполняется условие $A\cdot g_t=Af-tAf_0=\varphi-t\varphi_0$. Поэтому на основании (12) мы заключаем,

что если $t<\min\limits_{x_1<x<x_2}\varphi(x)/\varphi_0(x)$, то $g_t(x)$ выпукла вниз в промежутке (x_1, x_2), и поэтому $D_x^+g_t(x)$ в промежутке (x_1, x_2) возрастает.

Применяя такие же рассуждения для случая $t>\max\limits_{x_1<x<x_2}\varphi(x)/\varphi_0(x)$,

мы устанавливаем, что для любого подинтервала (x_1, x_2) из (r_1, r_2) имеют место неравенства

$$\min_{x_1<x<x_2}\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)}\times\left(D_x^+f_0(x_2)-D_x^+f_0(x_1)\right)\leqslant$$
$$\leqslant D_x^+f(x_2)-D_x^+f(x_1)\leqslant\max_{x_1<x<x_2}\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)}\times\left(D_x^+f_0(x_2)-D_x^+f_0(x_1)\right).$$

Поскольку функция $\varphi(x)/\varphi_0(x)$ непрерывна, из полученных выше неравенств следует, что

$$D_x^+f(x_2)-D_x^+f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)}\,d\left(D_x^+f_0(x)\right).$$

Последнее соотношение и выражает в интегральной форме тот факт, что $A\cdot f=D_m^+D_s^+f$.

Замечание 1. Оператор $D_m^+D_s^+$ мы можем рассматривать как обобщенный лапласиан в том смысле, что операции D_s^+ и D_m^+ отвечают соответственно *обобщенному градиенту* и *обобщенной дивергенции* в одномерном случае. Феллер называет функцию $s=s(x)$ *канонической шкалой*, а $m=m(x)$ — *канонической мерой* марковского процесса, о котором здесь говорилось. Результаты первого этапа доказательства показывают, что функции 1 и s образуют *фундаментальную систему линейно независимых решений* уравнения

$A \cdot v = 0$, так как всякое решение уравнения $A \cdot v = 0$ может быть единственным образом записано в виде линейной комбинации функций 1 и $s(x)$. Каноническая шкала процесса $P(t, x, E)$ определяется с точностью до некоторого линейного преобразования, т. е. всякая другая каноническая шкала s_1 должна иметь вид $s_1 = \alpha s + \beta$, где $\alpha > 0$. Отсюда следует, что каноническая мера m_1, соответствующая s_1, имеет форму $m_1 = \alpha^{-1} m$.

Замечание 2. Теорема 2 указывает представление инфинитезимального производящего оператора A во *внутренней точке* x промежутка (r_1, r_2). Для полного определения оператора A как инфинитезимального производящего оператора сжимающей полугруппы класса (C_0) положительных операторов T_t, действующих из пространства $C[r_1, r_2]$ в $C[r_1, r_2]$, нужно определить *краевые условия*, т. е. *граничные условия* для оператора A в обеих граничных точках r_1 и r_2, чтобы получить полное и конкретное описание области определения $D(A)$ оператора A. Следуя классификации Феллера [2] и [6] (ср. Хилле [6]), граничные точки r_1 (или r_2) подразделяют на так называемые *регулярную границу*, *границу-выход*, *границу-вход* и *естественную границу*. Для описания этой классификации введем следующие четыре величины:

$$\sigma_1 = \iint\limits_{r_1 < y < x < r_1'} dm(x)\, ds(y), \quad \mu_1 = \iint\limits_{r_1 < y < x < r_1'} ds(x)\, dm(y),$$

$$\sigma_2 = \iint\limits_{r_2 > y > x > r_2'} dm(x)\, ds(y), \quad \mu_2 = \iint\limits_{r_2 > y > x > r_2'} ds(x)\, dm(y).$$

Граничная точка r_i $(i = 1, 2)$ называется

регулярной,	если $\sigma_i < \infty$, $\mu_i < \infty$,
границей-выходом	при $\sigma_i < \infty$, $\mu_i = \infty$,
границей-входом	в случае $\sigma_i = \infty$, $\mu_i < \infty$,
естественной границей,	если $\sigma_i = \infty$, $\mu_i = \infty$,

причем указанные условия не зависят от выбора r_1' и r_2'. Для иллюстрации различных случаев рассмотрим следующие простые примеры.

Пример 1. Пусть $D_m^+ D_s^+ = d^2/dx^2$, $S = (-\infty, \infty)$. Здесь можно положить $s = x$ и $m = x$. Следовательно,

$$\sigma_2 = \iint\limits_{\infty > y > x > r_2'} dx\, dy = \int\limits_{r_2'}^{\infty} (y - r_2')\, dy = \infty,$$

$$\mu_2 = \iint\limits_{\infty > y > x > r_2'} dx\, dy = \infty,$$

и, таким образом, точка ∞ является естественной границей. Точно так же и точка $-\infty$ служит естественной границей.

Пример 2. $D_m^+ D_s^+ = d^2/dx^2$, $S = (-\infty, 0)$. Мы можем опять положить $s = x$, $m = x$. В этом случае $-\infty$ оказывается естественной границей, а 0 — регулярной границей.

Пример 3. Пусть $D_m^+ D_s^+ = x^2 d^2/dx^2 - d/dx$, $S = (0, \infty)$. Строго возрастающее непрерывное решение $s = s(x)$ уравнения $D_m^+ D_s^+ s = 0$ можно взять в этом случае в форме $s(x) = \int^x e^{-1/t}\,dt$, и тогда

$$D_s = e^{1/x}\frac{d}{dx}, \quad D_m^+ D_s^+ = x^2 e^{-1/x}\frac{d}{dx}e^{1/x}\frac{d}{dx}.$$

Поэтому здесь $ds = e^{-1/x}\,dx$, $dm = x^{-2}e^{1/x}\,dx$. Следовательно,

$$\sigma_1 = \iint\limits_{0<y<x<1} x^{-2}e^{1/x}\,dx e^{-1/y}\,dy = \int_0^1 [-e^{1/x}]_y^1 e^{-1/y}\,dy < \infty,$$

$$\mu_1 = \iint\limits_{0<y<x<1} e^{-1/x}\,dx y^{-2}e^{1/y}\,dy = \int_0^1 e^{-1/x}[-e^{1/y}]_0^x\,dx = \infty.$$

Таким образом, точка 0 — это граница-выход. Аналогично получаем

$$\sigma_2 = \iint\limits_{\infty>y>x>1} e^{1/x}x^{-2}\,dx e^{-1/y}\,dy = \int_1^\infty [-e^{1/x}]_1^y \cdot e^{-1/y}\,dy = \infty,$$

$$\mu_2 = \iint\limits_{\infty>y>x>1} e^{-1/x}\,dx e^{1/y}y^{-2}\,dy = \int_1^\infty e^{-1/x}[-e^{1/y}]_x^\infty\,dx = \infty.$$

Поэтому ∞ является естественной границей.

Пример 4. $D_m^+ D_s^+ = x^2 d^2/dx^2 + d/dx$, $S = (0, 2)$. Как и выше, мы находим $ds = e^{1/x}\,dx$, $dm = x^{-2}e^{-1/x}\,dx$, и поэтому нетрудно убедиться в том, что 0 служит границей-входом, а точка 2 является регулярной границей.

Вероятностная интерпретация вышеприведенной классификации, предложенная Феллером, заключается в следующем.

Вероятность того, что частица, локализованная в начальный момент времени во внутренней части открытого интервала (r_1, r_2), достигнет по истечении некоторого конечного промежутка времени регулярной границы или границы-выхода, положительна, в то время как частица не может (в вероятностном смысле) прийти в течение конечного промежутка времени ни к границе-входу, ни к естественной границе.

Литература

Работа Феллера [2] была опубликована в 1952 г. Доказательство теоремы 2, приведенное в этом параграфе, заимствовано из статей Феллера [3] и [4]; к этому вопросу относится также и доклад Феллера [5]. Мы отсылаем читателей также к книгам К. Ито—Мак-Кина [1] и Дынкина [3*], а также к другим работам, указанным в библиографии в этих книгах.

7. *Расширение диффузионного оператора*

Допустим, что возможные состояния некоторой системы, описываемой марковским процессом (не обязательно однородным во времени), представляются точками x некоторого n-мерного риманова пространства R класса C^∞. Обозначим через $P(s, x, t, E)$, $s \leqslant t$, переходную функцию — вероятность того, что точка x, отвечающая некоторому состоянию системы в момент времени s, будет перенесена в некоторый последующий момент времени t в бэровское множество $E \subseteq R$.

Рассмотрим вопрос о форме оператора A_s, определяемого условием

$$(A_s f)(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_R P(s, x, s+t, dy)(f(y) - f(x)), \quad f \in C_0^0(R). \tag{1}$$

Условие непрерывности линдеберговского типа записывается для процесса такого вида в форме

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{d(x, y) > \varepsilon} P(s, x, s+t, dy) = 0 \text{ при любом положительном } \varepsilon, \text{ где } d(x, y) \text{ — расстояние по геодезической между точками } x \text{ и } y. \tag{2}$$

Мы, однако, не будем сейчас предполагать, что условие (2) выполняется для рассматриваемого процесса $P(s, x, t, E)$. Имеет место следующая

Теорема. Предположим, что существует такая возрастающая последовательность $\{k\}$ положительных целых чисел, что для некоторой фиксированной пары точек $\{s, x\}$ выполняются следующие условия:

равномерно по k существует

$$\lim_{a \uparrow \infty} k \int_{d(x, y) > a} P(s, x, s+k^{-1}, dy) = 0; \tag{3}$$

$$\text{выражение } k \int_R \frac{d(x, y)^2}{1 + d(x, y)^2} P(s, x, s+k^{-1}, dy) \text{ равномерно ограничено относительно } k. \tag{4}$$