Литература

Работа Феллера [2] была опубликована в 1952 г. Доказательство теоремы 2, приведенное в этом параграфе, заимствовано из статей Феллера [3] и [4]; к этому вопросу относится также и доклад Феллера [5]. Мы отсылаем читателей также к книгам К. Ито — Мак-Кина [1] и Дынкина [3*], а также к другим работам, указанным в библиографии в этих книгах.

7. Расширение диффузионного оператора

Допустим, что возможные состояния некоторой системы, описываемой марковским процессом (не обязательно однородным во времени), представляются точками x некоторого n-мерного риманова пространства R класса C^∞. Обозначим через $P(s, x, t, E)$, $s \leqslant t$, переходную функцию — вероятность того, что точка x, отвечающая некоторому состоянию системы в момент времени s, будет перенесена в некоторый последующий момент времени t в бэровское множество $E \subseteq R$.

Рассмотрим вопрос о форме оператора A_s, определяемого условием

$$(A_s f)(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_R P(s, x, s+t, dy)(f(y) - f(x)), \quad f \in C_0^0(R). \tag{1}$$

Условие непрерывности линдеберговского типа записывается для процесса такого вида в форме

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{d(x,y) > \varepsilon} P(s, x, s+t, dy) = 0 \text{ при любом положительном } \varepsilon, \text{ где } d(x, y) \text{ — расстояние по геодезической между точками } x \text{ и } y. \tag{2}$$

Мы, однако, не будем сейчас предполагать, что условие (2) выполняется для рассматриваемого процесса $P(s, x, t, E)$. Имеет место следующая

Теорема. Предположим, что существует такая возрастающая последовательность $\{k\}$ положительных целых чисел, что для некоторой фиксированной пары точек $\{s, x\}$ выполняются следующие условия:

равномерно по k существует

$$\lim_{a \uparrow \infty} k \int_{d(x,y) > a} P(s, x, s+k^{-1}, dy) = 0; \tag{3}$$

$$\text{выражение } k \int_R \frac{d(x, y)^2}{1 + d(x, y)^2} P(s, x, s+k^{-1}, dy) \text{ равномерно ограничено относительно } k. \tag{4}$$

Допустим, что для некоторой функции $f(x) \in C_0^2(R)$ существует конечный

$$\lim_{k \to \infty} k \left\{ \int_R P\left(s, x, s+k^{-1}, dy\right) f(y) - f(x) \right\}. \tag{5}$$

Тогда при любом выборе фиксированных локальных координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точки $x \in R$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}(A_s f)(x) = a_j(s, x) \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_{ij}(s, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{d(x, y) \geqslant \varepsilon} \left\{ f(y) - f(x) - \frac{\rho(x, y)}{1+d(x, y)^2}(y_j - x_j) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \times \\ \times \frac{1+d(x, y)^2}{d(x, y)^2} G(s, x, dy),\end{aligned} \tag{6}$$

где

функция $G(s, x, E)$ неотрицательна и σ-аддитивна на бэровских множествах $E \subseteq R$ и $G(s, x, R) < \infty$; (7)

функция $\rho(x, y)$ непрерывна по x, y, и $\rho(x, y) = 1$ при $d(x, y) \leqslant \delta/2$, $\rho(x, y) = 0$ при $d(x, y) > \delta$ (δ — некоторая фиксированная положительная константа); (8)

квадратичная форма $b_{ij}(s, x)\xi_i\xi_j$ удовлетворяет неравенству $b_{ij}(s, x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$. (9)

Замечание. Формула (6) получена в работе Иосида [26]. Эта формула определяет расширение *диффузионного оператора*, имеющего форму эллиптического дифференциального оператора второго порядка, о котором говорилось в предыдущем параграфе. Третье слагаемое в правой части (6) представляет собой сумму бесконечного числа разностных операторов. Появление такого члена объясняется тем, что, как это допускалось, условие (2) Линдеберга может не выполняться. Формула (6) выражает в теоретико-операторной форме факт, который можно рассматривать как полную аналогию результатов Леви — Хинчина — К. Ито, относящихся к так называемым *безгранично делимым законам* теории вероятностей. См. по этому поводу Хилле — Филлипс [1].

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность неотрицательных σ-аддитивных мер вида

$$G_k(s, x, E) = k \int_E \frac{d(x, y)^2}{1+d(x, y)^2} P\left(s, x, s+k^{-1}, dy\right). \tag{10}$$

Из (3) и (4) следует, что

функция $G_k(s, x, E)$ ограничена равномерно относительно множеств E и индексов k, (11)

равномерно по k существует

$$\lim_{a \uparrow \infty} \int_{d(x, y) \geqslant a} G_k(s, x, dy) = 0. \tag{12}$$

Следовательно, при фиксированных $\{s, x\}$ линейный функционал L_k, определяемый равенством

$$L_k(g) = \int_R G_k(s, x, dy) g(y), \quad g \in C_0^0(R),$$

неотрицателен и непрерывен в нормированном линейном пространстве $C_0^0(R)$ с нормой $\|g\| = \sup_x |g(x)|$, причем нормы функционалов L_k равномерно ограничены относительно k.

Так как нормированное линейное пространство $C_0^0(R)$ сепарабельно, мы можем выбрать из последовательности $\{k\}$ такую подпоследовательность $\{k'\}$, чтобы существовал $\lim_{k' \to \infty} L_{k'}(g) = L(g)$ и при этом выражение $L(g)$ представляло собой некоторый неотрицательный линейный функционал в пространстве $C_0^0(R)$. Из леммы, относящейся к теории меры, доказательство которой можно найти в книге Халмоша [1], следует, что в этом случае существует некоторая неотрицательная σ-аддитивная мера $G(s, x, E)$, такая, что $G(s, x, R) < \infty$ и

$$\lim_{k = k' \to \infty} \int_R G_k(s, x, dy) g(dy) = \int_R G(s, x, dy) g(y) \tag{13}$$

для всех $g \in C_0^0(R)$.

Воспользуемся теперь соотношением

$$k\left[\int_R P\left(s, x, s+k^{-1}, dy\right) f(y) - f(x)\right] =$$
$$= \int_R \left\{\left[f(y) - f(x) - \frac{\rho(y, x)}{1+d(y, x)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] \frac{1+d(y, x)^2}{d(y, x)^2}\right\} \times$$
$$\times G_k(s, x, dy) + \int_R \frac{\rho(y, x)}{d(y, x)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} G_k(s, x, dy), \tag{14}$$

вытекающим из определения и свойств $G_k(s, x, E)$. Член вида $\{\ldots\}$ в первом интеграле в правой части (14) при достаточно малых значениях $d(y, x)$ можно записать в виде

$$(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} + (y_i - x_i)(y_j - x_j)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\right)\frac{1 + d(y, x)^2}{d(y, x)^2},$$

где $X_j = x_j + \theta(y_j - x_j)$, $0 < \theta < 1$. Отсюда следует, что величина $\{\ldots\}$ ограничена и непрерывна по y. Следовательно, ввиду (12) и (13) первое слагаемое в правой части (14) стремится при $k = k' \to \infty$ к $\int\limits_R \{\ldots\} G(s, x, dy)$. Поэтому вследствие (5) существует конечный

$$\lim_{k = k' \to \infty} \int\limits_R \frac{\rho(y, x)}{d(y, x)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} G_k(s, x, dy) = a_j(s, x)\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Отсюда, учитывая (3), мы, полагая

$$b_{ij}(s, x) = \varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{k = k' \to \infty} k \int\limits_{d(y, x) \geqslant \varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(s, x, s + k^{-1}, dy),$$

получаем формулу (6).

8. Марковские процессы и потенциалы

Пусть равностепенно непрерывная полугруппа $\{T_t\}$ класса (C_0) определена на некотором функциональном пространстве X равенством $(T_t f)(x) = \int\limits_S P(t, x, dy) f(y)$, где $P(t, x, dy)$ — марковский процесс, заданный в пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B})$. Обозначим через A инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$. По аналогии с частным случаем, когда A представляет собой лапласиан, элемент $f \in X$, удовлетворяющий уравнению $A \cdot f = 0$, называется ***гармоническим***. Из этого определения следует, что элемент f является гармоническим в том и только в том случае, если $\lambda(\lambda I - A)^{-1} f = f$ при всяком $\lambda > 0$. Если при некотором g элемент $f \in X$ представим в форме $f = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} (\lambda I - A)^{-1} g$, то f называется ***потенциалом***. Название это употребляется потому, что для такого элемента f ввиду замкнутости оператора A справедливо *уравнение Пуассона*

$$A \cdot f = \lim_{\lambda \downarrow 0} A(\lambda I - A)^{-1} g = \lim_{\lambda \downarrow 0} \{-g + \lambda(\lambda I - A)^{-1} g\} = -g.$$

Допустим теперь, что X является векторной структурой и одновременно локально выпуклым линейным топологическим пространством, причем всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность элементов из X слабо сходится к некоторому элементу пространства X, бóльшему, чем элементы этой последовательности. Предположим также, что резольвента $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$