чениях $d(y, x)$ можно записать в виде

$$(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} + (y_i - x_i)(y_j - x_j)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\right)\frac{1 + d(y, x)^2}{d(y, x)^2},$$

где $X_j = x_j + \theta(y_j - x_j)$, $0 < \theta < 1$. Отсюда следует, что величина $\{\ldots\}$ ограничена и непрерывна по y. Следовательно, ввиду (12) и (13) первое слагаемое в правой части (14) стремится при $k = k' \to \infty$ к $\int\limits_R \{\ldots\} G(s, x, dy)$. Поэтому вследствие (5) существует конечный

$$\lim_{k = k' \to \infty} \int\limits_R \frac{\rho(y, x)}{d(y, x)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} G_k(s, x, dy) = a_j(s, x)\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Отсюда, учитывая (3), мы, полагая

$$b_{ij}(s, x) = \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \lim_{k = k' \to \infty} k \int\limits_{d(y, x) \geqslant \varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(s, x, s + k^{-1}, dy),$$

получаем формулу (6).

8. *Марковские процессы и потенциалы*

Пусть равностепенно непрерывная полугруппа $\{T_t\}$ класса (C_0) определена на некотором функциональном пространстве X равенством $(T_t f)(x) = \int\limits_S P(t, x, dy) f(y)$, где $P(t, x, dy)$ — марковский процесс, заданный в пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B})$. Обозначим через A инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$. По аналогии с частным случаем, когда A представляет собой лапласиан, элемент $f \in X$, удовлетворяющий уравнению $A \cdot f = 0$, называется *гармоническим*. Из этого определения следует, что элемент f является гармоническим в том и только в том случае, если $\lambda(\lambda I - A)^{-1} f = f$ при всяком $\lambda > 0$. Если при некотором g элемент $f \in X$ представим в форме $f = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} (\lambda I - A)^{-1} g$, то f называется *потенциалом*. Название это употребляется потому, что для такого элемента f ввиду замкнутости оператора A справедливо *уравнение Пуассона*

$$A \cdot f = \lim_{\lambda \downarrow 0} A(\lambda I - A)^{-1} g = \lim_{\lambda \downarrow 0}\{-g + \lambda(\lambda I - A)^{-1} g\} = -g.$$

Допустим теперь, что X является векторной структурой и одновременно локально выпуклым линейным топологическим пространством, причем всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность элементов из X слабо сходится к некоторому элементу пространства X, бо́льшему, чем элементы этой последовательности. Предположим также, что резольвента $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$

положительна в том смысле, что при $f \geqslant 0$ выполняется неравенство $J_\lambda f \geqslant 0$. Принятые здесь предположения и терминология подсказываются аналогией с частным случаем, когда A представляет собой лапласиан, рассматриваемый в соответствующим образом выбранном функциональном пространстве.

Естественно назвать *субгармоническими* те элементы $f \in X$, для которых выполняется неравенство $A \cdot f \geqslant 0$. Ввиду положительности J_λ субгармонический элемент f при всех значениях $\lambda > 0$ удовлетворяет неравенству $\lambda J_\lambda f \geqslant f$. Мы докажем сейчас теорему, являющуюся аналогом хорошо известной теоремы Рисса, относящейся к обычным субгармоническим функциям (см. Радо [1]).

Теорема. Всякий субгармонический элемент x можно разложить на сумму гармонического элемента x_h и потенциала x_p, где гармоническая часть x_h элемента x равна $x_h = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x$, и x_h представляет собой так называемую *наименьшую гармоническую мажоранту* x в том смысле, что всякий гармонический элемент $x_H \geqslant x$ удовлетворяет неравенству $x_H \geqslant x_h$.

Доказательство (Иосида [4]). Из резольвентного уравнения

$$J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda) J_\lambda J_\mu \qquad (1)$$

мы получаем

$$(I - \lambda J_\lambda) = (I + (\mu - \lambda) J_\lambda)(I - \mu J_\mu). \qquad (2)$$

Так как элемент x субгармоничен, то ввиду положительности J_λ

из $\lambda > \mu$ следует, что $\lambda J_\lambda x \geqslant \mu J_\mu x \geqslant x$.

Следовательно, слабый предел $w\text{-}\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x = x_h$ вследствие предположений, сделанных относительно ограниченных монотонных последовательностей из X, существует. Поэтому, используя эргодическую теорему из гл. VIII, § 4, мы видим, что существует предел $x_h = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x$ и элемент x_h — гармоничен, т. е. $\lambda J_\lambda x_h = x_h$ для всех $\lambda > 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} x_p = (x - x_h) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} (J - \lambda J_\lambda) x = \\ &= \lim_{\lambda \downarrow 0} (-A)(\lambda I - A)^{-1} x = \lim_{\lambda \downarrow 0} (\lambda I - A)^{-1} (-Ax), \end{aligned}$$

откуда следует, что элемент x_p является потенциалом.

Предположим, что некоторый гармонический элемент x_H удовлетворяет неравенству $x_H \geqslant x$. Тогда вследствие положительности λJ_λ и свойств гармонического элемента x_H

$$x_H = \lambda J_\lambda x_H \geqslant \lambda J_\lambda x \text{ и, следовательно, } x_H \geqslant \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x = x_h.$$

Исследования Ханта и Дуба. Хант [1] предложил условия, при которых линейный оператор, принадлежащий $L(C_0^0(R^n), C_0^0(R^n))$, служит некоторой резольвентой полугруппы, индуцированной марковским процессом $P(t, x, E)$ в пространстве R^n, и рассмотрел также вопросы теории потенциалов, связанных с этим марковским процессом. Мы рекомендуем читателям превосходное изложение теории Ханта в книге Мейера [1]. В исследованиях Дуба [2] изучались граничные значения гармонической функции $f(x)$, когда x стремится к границе в ходе соответствующего марковского процесса. Основной метод исследований Дуба опирается на предельную теорему, относящуюся к систематически развитой им *теории мартингалов* [1]).

[1]) По материалу главы XIII см. также на русском языке Феллер [9*], Гихман, Скороход [1*], Дуб [4*], Дынкин [3*], Лоэв [1*], К. Ито [2*]. — *Прим. перев.*