ГЛАВА XIV

Интегрирование эволюционных уравнений

Обычная экспоненциальная функция служит решением следующей задачи с начальными значениями:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y, \qquad y(0) = y_0.$$

Мы рассмотрим уравнение диффузии

$$\frac{du}{dt} = \Delta u,$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^{m} \partial^2/\partial x_j^2$ — лапласиан в R^m. Поставим вопрос об отыскании решения $u = u(x, t)$, $t > 0$, этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $u(x, 0) = f(x)$, где $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторая заданная функция переменных x. Мы исследуем также волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad -\infty < t < \infty,$$

с начальными значениями

$$u(x, 0) = f(x), \quad (\partial u/\partial t)_{t=0} = g(x),$$

где f и g — заданные функции. Это уравнение можно записать в векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad v = \frac{\partial u}{\partial t},$$

и при этом начальные условия можно взять в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u(x, 0) \\ v(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в выбранном подходящим образом функциональном пространстве волновое уравнение приобретает форму уравнения диффузии (или уравнения теплопроводности): в левой части стоит производная по параметру t, играющему роль времени, а в правой — некоторый оператор дифференцирования по пространственным координатам, короче, волновое уравнение приобретает форму, аналогичную уравнению $dy/dt = \alpha y$. Поскольку решение последнего уравнения выражается экспоненциальной функцией, естественно предположить, что уравнение теплопроводности и волновое уравнение можно решить, определив соответствующим образом функции экспоненциального типа от операторов

$$\Delta \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix},$$

рассматривая их в подходящем функциональном пространстве. Эти соображения приводят к идее приложения теории полугрупп к решению задачи Коши общего вида. Заметим, что уравнение Шредингера

$$i^{-1}\, \partial u/dt = Hu = (\Delta + U(x))\, u,$$

где $U(x)$ — некоторая заданная функция, представляет собой другой пример так называемого *эволюционного уравнения* вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \qquad t > 0, \tag{1}$$

где A — некоторый линейный оператор в некотором функциональном пространстве, не обязательно непрерывный.

Уравнение вида (1) можно назвать *однородным во времени эволюционным уравнением*. Интегрирование такого уравнения может быть проведено с помощью теории полугрупп. В трех параграфах этой главы мы рассмотрим некоторые характерные примеры, относящиеся к интегрированию такого рода. Мы распространим также эту теорию интегрирования и на уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)\, u, \qquad a < t < b, \tag{2}$$

которое естественно назвать *неоднородным во времени эволюционным уравнением*.

1. Интегрирование уравнения диффузии в пространстве $L^2(R^m)$

Рассмотрим уравнение диффузии вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \qquad t > 0, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор

$$A = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \qquad (a^{ij}(x) = a^{ji}(x)) \tag{2}$$

строго эллиптичен в m-мерном евклидовом пространстве R^m. Мы предположим, что коэффициенты a^{ij}, b^i и c вещественны и принадлежат функциональному пространству $C^\infty(R^m)$ и что

$$\max\Big(\sup_x|a^{ij}(x)|,\ \sup_x|b^i(x)|,\ \sup_x|c(x)|,$$
$$\sup_x\left|a^{ij}_{x_k}(x)\right|,\ \sup_x\left|b^i_{x_k}(x)\right|,\ \sup_x\left|a^{ij}_{x_kx_s}(x)\right|\Big)=\eta<\infty. \tag{3}$$

Предположение о строгой эллиптичности оператора A означает, что существуют такие положительные постоянные λ_0 и μ_0, что

$$\mu_0\sum_{j=1}^m\xi_j^2\geqslant a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\geqslant\lambda_0\sum_{i=1}^m\xi_i^2 \tag{4}$$

при всех $x\in R^m$ и любом вещественном векторе $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)$.

Обозначим через $\hat{H}_0^1$ пространство всех вещественных функций $f(x)\in C_0^\infty(R^m)$ с нормой

$$\|f\|_1=\left(\int_{R^m}f^2\,dx+\sum_{j=1}^m\int_{R^m}f_{x_j}^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{5}$$

и пусть H_0^1 — пополнение $\hat{H}_0^1$ по норме $\|f\|_1$. Пусть также H_0^0 — пополнение $\hat{H}_1^0$ по норме

$$\|f\|_0=\left(\int_{R^m}f^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Мы ввели, таким образом, два вещественных гильбертовых пространства H_0^1 и H_0^0, причем H_0^1 и $\hat{H}_0^1$ плотны в H_0^0 по норме $\|\ \|_0$. Из предложения, доказанного в гл. I, § 10, мы знаем, что H_0^1 совпадает с вещественным пространством Соболева $W^1(R^m)$. Известно также, что H_0^0 совпадает с вещественным гильбертовым пространством $L^2(R^m)$. Обозначим скалярные произведения в гильбертовых пространствах H_0^1 и H_0^0 соответственно через $(f,g)_1$ и $(f,g)_0$.

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (1) в комплексном гильбертовом пространстве $L^2(R^m)$ при условиях (3) и (4), нам потребуются некоторые леммы, которые будут также играть важную роль в следующих параграфах.

Лемма 1 (об интегрировании по частям). Пусть $f,g\in\hat{H}_0^1$. Тогда

$$(Af,g)_0=-\int_{R^m}a^{ij}f_{x_i}g_{x_j}\,dx-\int_{R^m}a^{ij}_{x_j}f_{x_i}g\,dx+$$
$$+\int_{R^m}b^if_{x_i}g\,dx+\int_{R^m}cfg\,dx, \tag{7}$$

т. е. при вычислении $(Af, g)_0$ можно интегрировать по частям, и члены, содержащие производные второго порядка, исчезают.

Доказательство. Из (3) и того факта, что функции f и g принадлежат $\hat{H}_0^1$, мы заключаем, что выражения вида $a^{ij}f_{x_ix_j}g$ интегрируемы по пространству R^m. А так как функции f и g обладают бикомпактными носителями, то

$$\int_{R^m} a^{ij}f_{x_ix_j}g\,dx = -\int_{R^m} a^{ij}f_{x_i}g_{x_j}\,dx - \int_{R^m} a^{ij}_{x_j}f_{x_i}g\,dx.$$

Замечание. Оператор A^*, формально сопряженный оператору A, определяется как

$$(A^*f)(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(a^{ij}(x)f(x)) - \frac{\partial}{\partial x_i}(b^i(x)f(x)) + c(x)f(x). \qquad (8)$$

Как и выше, легко получается следующий результат: если $f, g \in \hat{H}_0^1$, то при вычислении $(A^*f, g)_0$ можно интегрировать по частям, и при этом члены, содержащие производные второго порядка, исчезают, т. е.

$$(A^*f, g)_0 = -\int_{R^m} a^{ij}f_{x_i}g_{x_j}\,dx - \int_{R^m} a^{ij}_{x_i}fg_{x_j}\,dx - \\ - \int_{R^m} b^ifg_{x_i}\,dx + \int_{R^m} cfg\,dx. \qquad (7')$$

Следствие. Существуют такие положительные постоянные $\varkappa$, γ и δ, что при всех достаточно малых положительных значениях α

$$\begin{aligned} &\alpha\delta\|f\|_1^2 \leqslant (f - \alpha Af, f)_0 \leqslant (1 + \alpha\gamma)\|f\|_1^2 \quad \text{при} \quad f \in \hat{H}_0^1, \\ &\alpha\delta\|f\|_1^2 \leqslant (f - \alpha A^*f, f)_0 \leqslant (1 + \alpha\gamma)\|f\|_1^2 \quad \text{при} \quad f \in \hat{H}_0^1; \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} &|(f - \alpha Af, g)_0| \leqslant (1 + \alpha\gamma)\|f\|_1\|g\|_1 \quad \text{при} \quad f, g \in \hat{H}_0^1, \\ &|(f - \alpha A^*f, g)_0| \leqslant (1 + \alpha\gamma)\|f\|_1\|g\|_1 \quad \text{при} \quad f, g \in \hat{H}_0^1; \end{aligned} \qquad (10)$$

$$|(Af, g)_0 - (f, Ag)_0| \leqslant \varkappa\|f\|_1\|g\|_0 \quad \text{при} \quad f, g \in \hat{H}_0^1. \qquad (11)$$

Доказательство. Условия (9) и (10) доказываются с помощью (3), (4), (7), (7′) и с использованием неравенства

$$2\alpha|ab| \leqslant \alpha(\nu|a|^2 + \nu^{-1}|b|^2), \qquad (12)$$

которое выполняется при любых положительных α и ν. Действительно, мы можем воспользоваться оценкой

$$\left|\int_{R^m} a^{ij}_{x_j}f_{x_i}g\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^m m\eta\left(\nu\|f_{x_i}\|_0^2 + \nu^{-1}\|g\|_0^2\right).$$

Условие (11) выводится из соотношения

$$(Af,\ g)_0-(f,\ Ag)_0=$$
$$=-\int\limits_{R^m}\left(2a^{ij}_{x_i}f_{x_j}g+a^{ij}_{x_ix_j}fg-2b^if_{x_i}g-b^i_{x_i}fg\right)dx.$$

Лемма 2 (о существовании решений уравнения $u-\alpha Au=f$). Пусть положительное число α_0 выбрано так, что утверждения доказанного выше следствия выполняются для значений $0<\alpha\leqslant\alpha_0$. Тогда при любой функции $f(x)\in\hat{H}^1_0$ уравнение

$$u-\alpha Au=f\qquad(0<\alpha\leqslant\alpha_0)\tag{13}$$

имеет однозначно определенное решение $u\in H^1_0\cap C^\infty(R^m)$.

Доказательство. Определим для функций $u,\ v\in\hat{H}^1_0$ билинейный функционал $\hat{B}(u,\ v)=(u-\alpha A^*u,\ v)_0$. Из вышеприведенного следствия вытекает, что

$$\begin{gathered}|\hat{B}(u,\ v)|\leqslant(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\|v\|_1,\\ \alpha\delta\|u\|_1^2\leqslant\hat{B}(u,\ u).\end{gathered}\tag{14}$$

Поэтому мы можем продолжить $\hat{B}(u,\ v)$ по непрерывности до билинейного функционала $B(u,\ v)$, определенного для функций $u,\ v\in H^1_0$, так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{gathered}|B(u,\ v)|\leqslant(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\|v\|_1,\\ \alpha\delta\|u\|_1^2\leqslant B(u,\ u).\end{gathered}\tag{14'}$$

Линейный функционал $F(u)=(u,\ f)_0$, определенный на H^1_0, ввиду неравенств $|(u,\ f)_0|\leqslant\|u\|_0\|f\|_0\leqslant\|u\|_1\|f\|_0$ является ограниченным линейным функционалом. Следовательно, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала, если ее применить к H^1_0, найдется единственный элемент $v=v(f)\in H^1_0$, такой, что $(u,\ f)_0=(u,\ v(f))_1$. Применяя теперь к гильбертову пространству H^1_0 теорему Мильграма — Лакса, мы видим, что

$$(u,\ f)_0=(u,\ v(f))_1=B(u,\ Sv(f))\ \text{при всех}\ u\in H^1_0,\tag{15}$$

где S — некоторый ограниченный линейный оператор, отображающий пространство H^1_0 на себя.

Пусть теперь u пробегает $C^\infty_0(R^m)$, и пусть элементы $v_n\in\hat{H}^1_0$ выбраны так, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n-Sv(f)\|_1=0$. Тогда

$$B(u,\ Sv(f))=\lim_{n\to\infty}B(u,\ v_n)=\lim_{n\to\infty}\hat{B}(u,\ v_n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(u-\alpha A^*u,\ v_n)_0=(u-\alpha A^*u,\ Sv(f))_0,$$

так как норма $\| \ \|_1$ больше, чем норма $\| \ \|_0$. Следовательно,

$$(u, f)_0 = (u - \alpha A^* u, Sv(f))_0, \tag{15'}$$

т. е. выражение $Sv(f) \in H_0^1$ представляет собой обобщенное решение уравнения (13). Поэтому, учитывая строгую эллиптичность оператора $(I - \alpha A)$ и тот факт, что $f \in C_0^\infty(R^m)$, мы видим, что на основании следствия теоремы Фридрихса из гл. VI, § 9, мы можем считать, что функция $u = Sv(f) \in H_0^1$ является решением уравнения (13), принадлежащим классу $C^\infty(R^m)$. Таким образом, $u = Sv(f) \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$.

Единственность построенного таким способом решения u уравнения (13) устанавливается следующим образом. Пусть функция $u \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ удовлетворяет уравнению $u - \alpha A u = 0$. Тогда $Au \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m) \subseteq H_0^0$, так что выражение $(u - \alpha A u, u)_0$ определено и равно нулю. Допустим, что элементы $u_n \in \hat{H}_0^1$ выбраны так, что $\lim_{n \to \infty} \| u - u_n \|_1 = 0$. Интегрируя по частям, мы получаем на основании (9) оценку вида

$$0 = (u - \alpha A u, u)_0 = \lim_{n \to \infty} (u - \alpha A u, u_n)_0 \geqslant \alpha\delta \| u \|_1^2,$$

откуда заключаем, что $u = 0$.

Следствие 1. Существуют такие положительные постоянные $\hat{\alpha}_0$ и η_0, что для любой функции $f \in \hat{H}_0^1$ уравнение

$$\alpha u - A u = f \quad (0 < \hat{\alpha}_0 + \lambda_0 + \eta_0 \leqslant \alpha) \tag{16}$$

обладает единственным решением $u = u_f \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ и при этом справедлива оценка

$$\| u_f \|_0 \leqslant (\alpha - \lambda_0 - \eta_0)^{-1} \| f \|_0. \tag{17}$$

Доказательство. Неравенство Шварца приводит к оценке

$$\| (\alpha I - A) u \|_0 \cdot \| u \|_0 \geqslant | ((\alpha I - A) u, u)_0 | \quad \text{при} \quad u \in \hat{H}_0^1. \tag{18}$$

Интегрируя по частям, мы находим

$$((\alpha I - A) u, u)_0 = \alpha \| u \|_0^2 + \int_{R^m} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \, dx + \\ + \int_{R^m} a^{ij}_{x_j} u_{x_i} u \, dx - \int_{R^m} b^i u_{x_i} u \, dx - \int_{R^m} c u u \, dx.$$

Следовательно, учитывая (3), (4) и (12), получаем

$$((\alpha I - A)u,\ u)_0 \geqslant \alpha \|u\|_0^2 + \lambda_0(\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2) -$$
$$- m^2\eta\left[\nu(\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2) + \nu^{-1}\|u\|_0^2 + m^{-2}\|u\|_0^2\right] =$$
$$= (\alpha - \lambda_0 - m^2\eta(\nu^{-1} - \nu + m^{-2}))\|u\|_0^2 + (\lambda_0 - m^2\eta\nu)\|u\|_1^2.$$

Таким образом, учитывая (18), мы видим, что при значении $\eta_0 = m^2\eta(\nu^{-1} - \nu + m^{-2})$

$$\|(\alpha I - A)u\|_0 \geqslant (\alpha - \lambda_0 - \eta_0)\|u\|_0 \text{ при всех } u \in \widehat{H}_0^1, \tag{17'}$$

если выбрать $\nu > 0$ столь малым, чтобы $(\lambda_0 - m^2\eta\nu)$ и η_0 были положительны. Далее, выбирая $\widehat{\alpha}_0$ столь большим, чтобы для значений $\alpha \geqslant \widehat{\alpha}_0 + \lambda_0 + \eta_0$ можно было применить лемму 2, мы устанавливаем существование решения уравнения (16).

Решение $u = u_f \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ уравнения (16) можно аппроксимировать последовательностью функций, принадлежащих $\widehat{H}_0^1$ и сходящихся к u по $\|\ \|_1$-норме. Эти соображения и позволяют вывести оценку (17) из (18) и (17').

Следствие 2. Будем рассматривать сейчас A как оператор, действующий из области $D(A) = (\alpha I - A)^{-1}\widehat{H}_0^1 \subseteq H_0^0$ в H_0^0. Тогда наименьшее замкнутое расширение $\widehat{A}$ оператора A в H_0^0 обладает при значениях $\alpha > \widehat{\alpha}_0 + \lambda_0 + \eta_0$ резольвентой $(\alpha I - \widehat{A})^{-1}$, которая представляет собой оператор, отображающий пространство H_0^0 в себя, и удовлетворяет оценке

$$\|(\alpha I - \widehat{A})^{-1}\|_0 \leqslant (\alpha - \lambda_0 - \eta_0)^{-1}. \tag{19}$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения с очевидностью вытекает из следствия 1, если учесть тот факт, что множества $D(A)$ и $\widehat{H}_0^1$ оба плотны в H_0^0 по норме $\|\ \|_0$.

Мы видим теперь, что, согласно следствию 2 из гл. IX, § 7, $\widehat{A}$ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой полугруппы T_t класса (C_0) в B-пространстве H_0^0, для которой при значениях $t \geqslant 0$ выполняется неравенство $\|T_t\|_0 \leqslant e^{(\lambda_0 + \eta_0)t}$.

Теперь может быть доказана

Теорема 1. Обозначим через $\widehat{H}_0^1$ комплексное пространство всех комплексных функций $f \in C_0^\infty(R^m)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \left(\int_{R^m} |f|^2 dx + \sum_{j=1}^{m} \int_{R^m} |f_{x_j}|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть пространства $\widetilde{H}_0^1$ и $\widetilde{H}_0^0$ служат пополнениями комплексного пространства $\widehat{H}_0^1$ соответственно по нормам $\|f\|_1$ и $\|f\|_0$. Мы знаем, что $\widetilde{H}_0^1$ совпадает с комплексным пространством Соболева $W^1(R^m)$ (см. гл. I, § 10). Очевидно также, что $\widetilde{H}_0^0$ есть не что иное, как гильбертово пространство $L^2(R^m)$. Будем рассматривать A как оператор, действующий из области $D(A)=(\alpha I-A)^{-1}\widetilde{H}_0^1\subseteq L^2(R^m)$ в $L^2(R^m)$. Тогда наименьшее замкнутое расширение $\widetilde{A}$ оператора A в пространстве $L^2(R^m)$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой голоморфной полугруппы T_t класса (C_0), определенной в $L^2(R^m)$, для которой при $t\geqslant 0$ справедлива оценка $\|T_t\|_0\leqslant e^{(\lambda_0+\eta_0)t}$.

Доказательство. Из предыдущего следствия 2, учитывая вещественность коэффициентов дифференциального оператора A, мы заключаем, что область значений $R(\alpha I-A)=(\alpha I-A)D(A)$ плотна в пространстве $L^2(R^m)$ по норме $\|\ \|_0$ при значениях $\alpha>\hat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$. Кроме того, если выбрать функцию $(u+iv)\in L^2(R^m)$ так, чтобы $(u+iv)\in D(A)$, то

$$\|(\alpha I-A)(u+iv)\|_0^2=\|(\alpha I-A)u\|_0^2+\|(\alpha I-A)v\|_0^2\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^2\left(\|u\|_0^2+\|v\|_0^2\right).$$

Поэтому обратный оператор $(\alpha I-\widetilde{A})^{-1}$ является ограниченным линейным оператором, отображающим $L^2(R^m)$ в себя, и при этом $\|(\alpha I-\widetilde{A})^{-1}\|_0\leqslant(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^{-1}$ для всех значений $\alpha>\hat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$.

Отсюда мы видим, что, учитывая теорему гл. IX, § 10, нам достаточно лишь убедиться в том, что

$$\overline{\lim_{|\tau|\uparrow\infty}}\,|\tau|\,\|((\alpha+i\tau)I-\widetilde{A})^{-1}\|_0<\infty. \tag{20}$$

Для функций $w\in D(A)$ выполняется условие

$$\|((\alpha+i\tau)I-A)w\|_0\|w\|_0\geqslant|(((\alpha+i\tau)I-A)w,\ w)_0|. \tag{21}$$

Интегрируя теперь по частям, мы, как и при выводе неравенства (17), находим, что

$$|\operatorname{Re}(((\alpha+i\tau)I-A)w,\ w)_0|=$$
$$=\Big||\alpha|\|w\|_0^2+\operatorname{Re}\Big(\int_{R^m}a^{ij}w_{x_i}\bar{w}_{x_j}\,dx+\int_{R^m}a^{ij}_{x_i}w_{x_j}\bar{w}\,dx-$$
$$-\int_{R^m}b^iw_{x_i}\bar{w}\,dx-\int_{R^m}cw\bar{w}\,dx\Big)\Big|\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha-\lambda_0-\eta_0)\|w\|_0^2+(\lambda_0-m^2\eta\nu)\|w\|_1^2.$$

Точно так же мы получаем, что

$$|\operatorname{Im}(((\alpha+i\tau)I-A)w,\ w)_0|\geqslant\big||\tau|\|w\|_0^2-m^2\eta\left(\|w\|_1^2+m^{-2}\|w\|_0^2\right)\big|\geqslant$$
$$\geqslant(|\tau|-\eta)\|w\|_0^2-m^2\eta\|w\|_1^2.$$

Предположим, что найдется такой элемент $w_0 \in D(A)$, $\|w_0\|_0 \neq 0$, что

$$|\operatorname{Im}(((\alpha + i\tau) I - A) w_0, w_0)_0| < 2^{-1}(|\tau| - \eta)\|w_0\|_0^2$$

при достаточно больших τ (или достаточно больших значениях $-\tau$). Тогда для таких больших τ (или $-\tau$) должно выполняться неравенство

$$m^2\eta\|w_0\|_1^2 > 2^{-1}(|\tau| - \eta)\|w_0\|_0^2,$$

и поэтому

$$|\operatorname{Re}(((\alpha + i\tau) I - A) w_0, w_0)_0| \geqslant (\lambda_0 - m^2\eta\nu)\frac{(|\tau| - \eta)}{2m^2\eta}\|w_0\|_0^2.$$

Теперь мы видим, что утверждение теоремы 1 непосредственно следует из (21).

Теорема 2. При любой функции $f \in L^2(R^m)$ выражение $u(t, x) = (T_t f)(x)$ бесконечно дифференцируемо по t и x при $t > 0$ и $x \in R^m$, и функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению диффузии (1) и начальному условию $\lim\limits_{t \downarrow 0}\|u(t, x) - f(x)\|_0 = 0$.

Доказательство. Обозначим k-ю сильную производную T_t в пространстве $L^2(R^m)$ по переменной t через $T_t^{(k)}$. Так как T_t — голоморфная полугруппа класса (C_0) в $L^2(R^m)$, то

$$T_t^{(k)} f = \tilde{A}^k T_t f \in L^2(R^m) \quad \text{при} \quad t > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Оператор $\tilde{A}$ служит наименьшим замкнутым расширением A в $L^2(R^m)$, и поэтому $A^k T_t f \in L^2(R^m)$ при всяком фиксированном $t > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, если применять оператор A^k в смысле теории обобщенных функций. Поэтому, согласно следствию из теоремы Фридрихса (гл. VI, § 9), при всяком фиксированном значении $t > 0$ функция $u(t, x)$ совпадает с некоторой функцией класса $C^\infty(R^m)$, за исключением, быть может, значений на некотором множестве меры нуль.

Используя теперь оценку $\|T_t\|_0 \leqslant e^{(\lambda_0 + \eta_0)t}$, мы замечаем, что если применить эллиптический дифференциальный оператор

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A\right)$$

(в смысле теории обобщенных функций) любое количество раз к функции $u(t, x)$, то полученная при этом функция будет локально интегрируема с квадратом в произведении пространств $\{t; 0 < t < \infty\} \times R^m$. Применяя следствие теоремы Фридрихса из гл. VI, § 9 еще раз, мы устанавливаем, что функция $u(t, x)$ совпадает с некоторой функцией класса C^∞ при $t > 0$ и $x \in R^m$ всюду, за исключением, быть может, некоторого множества точек (t, x) меры нуль в произведении пространств $\{t; 0 < t < \infty\} \times R^m$. Таким образом, мы можем рассматривать $u(t, x)$ в этом смысле как классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\lim\limits_{t \downarrow 0}\|u(t, x) - f(x)\|_0 = 0$.

Замечание. Построенное выше решение $u(t, x)$ обладает следующим свойством „единственности продолжения вперед и назад“:

$$\text{если } u(t_0, x) \equiv 0 \text{ на каком-то открытом множестве } G \subsetneq R^m \text{ при некотором фиксированном } t_0 > 0, \text{ то } u(t, x) = 0 \text{ при всяком } t > 0 \text{ и } x \in G. \tag{22}$$

Доказательство. Из голоморфности полугруппы T_t класса (C_0) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| T_{t_0+h} f - \sum_{k=0}^{n} (k!)^{-1} h^k A^k T_{t_0} f \right\|_0 = 0$$

при достаточно малых значениях h. Поэтому, как и при доказательстве полноты пространства $L^2(R^m)$, можно указать такую подпоследовательность $\{n'\}$ ряда натуральных чисел, что

$$u(t_0 + h, x) = \lim_{n' \to \infty} \sum_{k=0}^{n'} (k!)^{-1} h^k A^k u(t_0, x)$$
при почти всех $x \in R^m$.

Как следует из предположения (22), $A^k u(t_0, x) = 0$ в G, и поэтому $u(t_0 + h, x) = 0$ в области G при достаточно малых h. Повторяя это построение, мы и убеждаемся в справедливости утверждения (22).

Литература

Результаты этого раздела взяты из работы Иосида [21]. В отношении свойства „единственности продолжения вперед и назад“ справедливо более точное утверждение: $u(t, x) = 0$ при всяком $t > 0$ и любых $x \in R^m$. Это следует из результата Мизохата [3], который установил для решений $u(t, x)$ уравнения диффузии свойство „единственности продолжения по пространству“: если $u(t, x) = 0$ при всех $t > 0$ и $x \in G$, то $u(t, x) = 0$ при любых $t > 0$, $x \in R^m$. По поводу голоморфности полугруппы T_t, о которой говорилось выше, см. также Филлипс [6]. Заметим, что свойство единственности продолжения решений уравнения теплопроводности $\partial u/\partial t = \Delta u$ было впервые сформулировано и доказано Ямабе — С. Ито [1].

Существует весьма полное исследование параболических уравнений с помощью методов теории диссипативных операторов. См. по этому поводу Филлипс [7].

2. Интегрирование уравнения диффузии в бикомпактном римановом пространстве

Рассмотрим связное ориентированное m-мерное риманово пространство R класса C^∞ с метрикой

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j. \tag{1}$$