Замечание. Построенное выше решение $u(t, x)$ обладает следующим свойством „единственности продолжения вперед и назад“:

$$\begin{gathered}\text{если } u(t_0, x) \equiv 0 \text{ на каком-то открытом множестве} \\ G \subsetneq R^m \text{ при некотором фиксированном } t_0 > 0, \text{ то} \\ u(t, x) = 0 \text{ при всяком } t > 0 \text{ и } x \in G.\end{gathered} \tag{22}$$

Доказательство. Из голоморфности полугруппы T_t класса (C_0) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| T_{t_0+h} f - \sum_{k=0}^{n} (k!)^{-1} h^k A^k T_{t_0} f \right\|_0 = 0$$

при достаточно малых значениях h. Поэтому, как и при доказательстве полноты пространства $L^2(R^m)$, можно указать такую подпоследовательность $\{n'\}$ ряда натуральных чисел, что

$$u(t_0 + h, x) = \lim_{n' \to \infty} \sum_{k=0}^{n'} (k!)^{-1} h^k A^k u(t_0, x)$$

при почти всех $x \in R^m$.

Как следует из предположения (22), $A^k u(t_0, x) = 0$ в G, и поэтому $u(t_0 + h, x) = 0$ в области G при достаточно малых h. Повторяя это построение, мы и убеждаемся в справедливости утверждения (22).

Литература

Результаты этого раздела взяты из работы Иосида [21]. В отношении свойства „единственности продолжения вперед и назад“ справедливо более точное утверждение: $u(t, x) = 0$ при всяком $t > 0$ и любых $x \in R^m$. Это следует из результата Мизохата [3], который установил для решений $u(t, x)$ уравнения диффузии свойство „единственности продолжения по пространству“: если $u(t, x) = 0$ при всех $t > 0$ и $x \in G$, то $u(t, x) = 0$ при любых $t > 0$, $x \in R^m$. По поводу голоморфности полугруппы T_t, о которой говорилось выше, см. также Филлипс [6]. Заметим, что свойство единственности продолжения решений уравнения теплопроводности $\partial u/\partial t = \Delta u$ было впервые сформулировано и доказано Ямабе — С. Ито [1].

Существует весьма полное исследование параболических уравнений с помощью методов теории диссипативных операторов. См. по этому поводу Филлипс [7].

2. Интегрирование уравнения диффузии в бикомпактном римановом пространстве

Рассмотрим связное ориентированное m-мерное риманово пространство R класса C^∞ с метрикой

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j. \tag{1}$$

Пусть A — некоторый линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка с коэффициентами класса C^∞, определенный в R:

$$A = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2}$$

Допустим, что коэффициенты a^{ij} образуют симметричный контравариантный тензор, а величины $b^i(x)$ при преобразовании координат $(x^1, x^2, \ldots, x^m) \to (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^m)$ преобразуются по правилу

$$\overline{b}^i = b^k \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} + a^{kj}\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^k \partial x^j}, \tag{3}$$

так что значение $(Af)(x)$ определяется однозначно независимо от выбора локальных координат. Мы предположим также, что оператор A *строго эллиптичен* в том смысле, что существуют такие положительные постоянные λ_0 и μ_0, что

$$\mu_0 \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \geqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_0 \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \text{ для любого вещественного вектора } (\xi_1, \ldots, \xi_m) \text{ и любого } x \in R^m. \tag{4}$$

Исследуем в целом задачу Коши для уравнения диффузии в пространстве R: найти решение $u(t, x)$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad t > 0, \quad u(0, x) = f(x), \tag{5}$$

где $f(x)$ — заданная функция на R.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если R бикомпактно, так что его можно рассматривать как пространство без границы, то уравнение (5) при любой начальной функции $f \in C^\infty(R)$ допускает единственное решение $u(t, x)$, принадлежащее классу C^∞ по переменным (t, x), $t > 0$, $x \in R$. Это решение можно представить в виде

$$u(t, x) = \int_R P(t, x, dy) f(y), \tag{6}$$

где $P(t, x, E)$ — переходная функция некоторого определенного в R марковского процесса.

Доказательство. Обозначим через $C(R)$ B-пространство вещественных непрерывных функций $f(x)$, заданных на R, с нормой $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. Покажем сначала, что

при любых $f \in C^\infty(R)$ и $n > 0$

$$\max_x h(x) \geqslant f(x) \geqslant \min_x h(x), \tag{7}$$

где $h(x) = f(x) - n^{-1}(Af)(x)$.

Пусть функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x = x_0$. Выберем локальную систему координат в точке x_0 так, чтобы $a^{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Благодаря условию (4) такой выбор действительно возможен. Тогда

$$h(x_0) = f(x_0) - n^{-1}(Af)(x_0) =$$
$$= f(x_0) - n^{-1}b^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0^i} - n^{-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial (x_0^i)^2} \geqslant f(x_0),$$

поскольку в x_0 как в точке максимума

$$\frac{\partial f}{\partial x_0^i} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (x_0^i)^2} \leqslant 0.$$

Таким образом, $\max_x h(x) \geqslant f(x)$. Аналогично можно показать, что $f(x) \geqslant \min_x h(x)$.

Будем теперь рассматривать A как оператор, действующий из $D(A) = C^\infty(R) \subseteq C(R)$ в $C(R)$. Из (7) видно, что обратный оператор $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует при $n > 0$ и $\|(I - n^{-1}A)^{-1} g\| \leqslant \|g\|$ для элементов g из области значений $R(I - n^{-1}A) = (I - n^{-1}A)D(A)$. При достаточно больших n эта область значений сильно плотна в $C(R)$, так как из результатов предыдущего параграфа следует, что для любой функции $g \in C^\infty(R)$ и достаточно больших $n > 0$ уравнение $u - n^{-1}Au = g$ обладает единственным решением $u \in C^\infty(R)$. Действительно, ввиду бикомпактности R к рассматриваемому риманову пространству R без границы можно применить лемму 1 об интегрировании по частям. Далее $C^\infty(R)$ сильно плотно в $C(R)$ — это можно установить, применяя к функциям из $C(R)$ методы, указанные в предложении 8, гл. I, § 1.

Отсюда следует, что наименьшее замкнутое расширение $\bar{A}$ оператора A в $C(R)$ удовлетворяет следующим условиям:

резольвента $(I - n^{-1}\bar{A})^{-1}$ определена при достаточно больших $n > 0$ как ограниченный линейный оператор, отображающий $C(R)$ в себя; (8)

на пространстве R во всех точках, где $h(x) \geqslant 0$, выполняется неравенство $((I - n^{-1}\bar{A})^{-1} h)(x) \geqslant 0$; (9)

$$(I - n^{-1}\bar{A})^{-1} \cdot 1 = 1. \tag{10}$$

Положительность оператора $(I - n^{-1}\bar{A})^{-1}$, указанная в (9), следует из (7). Уравнение (10) вытекает из того, что $A \cdot 1 = 0$.

Следовательно, $\bar{A}$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой сжимающей полугруппы T_t класса (C_0), определенной на $C(R)$. Как и в предыдущем параграфе, можно показать, что из строгой эллиптичности оператора A вытекает, что при любой функции $f \in C^\infty(R)$ выражение $u(t, x) = (T_t f)(x)$ определяет функцию класса C^∞ по переменным (t, x) при $t > 0$ и $x \in R$, так что $u(t, x)$ является классическим решением уравнения (5).

Пространством, сопряженным к $C(R)$, служит пространство бэровских мер на R, откуда легко с учетом (9) и (10) выводится заключительное утверждение теоремы.

3. Интегрирование волнового уравнения в евклидовом пространстве R^m

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор

$$A = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \qquad (a^{ij}(x) = a^{ji}(x)) \tag{2}$$

строго эллиптичен в m-мерном евклидовом пространстве R^m. Допустим, что коэффициенты a^{ij}, b^i и c вещественны, принадлежат C^∞ и удовлетворяют требованиям (3) и (4), гл. IV, § 1. Как и ранее, обозначим через $\hat{H}_0^1$ пространство всех вещественных функций $f(x)$ из $C_0^\infty(R^m)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \left(\int\limits_{R^m} f^2\,dx + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{R^m} f_{x_j}^2\,dx\right)^{1/2},$$

и пусть H_0^1 и H_0^0 — пополнения $\hat{H}_0^1$ соответственно по нормам $\|f\|_1$ и $\|f\|_0$ $\left(\|f\|_0 = \left(\int\limits_{R^m} f^2\,dx\right)^{1/2}\right)$.

Лемма. Для любой пары элементов $\{f, g\}$ из $\hat{H}_0^1$ уравнение

$$\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - n^{-1}\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{3}$$

имеет при всяком целом n, таком, что $|n^{-1}|$ достаточно мало, единственное решение $\{u, v\}$, $u, v \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$, удовлетворяющее оценке

$$((u - \alpha_0 Au, u)_0 + \alpha_0(v, v)_0)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \beta|n|^{-1})^{-1}((f - \alpha_0 Af, f)_0 + \alpha_0(g, g)_0)^{1/2}, \tag{4}$$