ленной на $C(R)$. Как и в предыдущем параграфе, можно показать, что из строгой эллиптичности оператора A вытекает, что при любой функции $f \in C^\infty(R)$ выражение $u(t, x) = (T_t f)(x)$ определяет функцию класса C^∞ по переменным (t, x) при $t > 0$ и $x \in R$, так что $u(t, x)$ является классическим решением уравнения (5).

Пространством, сопряженным к $C(R)$, служит пространство бэровских мер на R, откуда легко с учетом (9) и (10) выводится заключительное утверждение теоремы.

3. Интегрирование волнового уравнения в евклидовом пространстве R^m

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор

$$A = a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \qquad (a^{ij}(x) = a^{ji}(x)) \tag{2}$$

строго эллиптичен в m-мерном евклидовом пространстве R^m. Допустим, что коэффициенты a^{ij}, b^i и c вещественны, принадлежат C^∞ и удовлетворяют требованиям (3) и (4), гл. IV, § 1. Как и ранее, обозначим через $\hat{H}_0^1$ пространство всех вещественных функций $f(x)$ из $C_0^\infty(R^m)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \left(\int_{R^m} f^2\,dx + \sum_{j=1}^{m} \int_{R^m} f_{x_j}^2\,dx \right)^{1/2},$$

и пусть H_0^1 и H_0^0 — пополнения $\hat{H}_0^1$ соответственно по нормам $\|f\|_1$ и $\|f\|_0$ $\left(\|f\|_0 = \left(\int_{R^m} f^2\,dx \right)^{1/2} \right)$.

Лемма. Для любой пары элементов $\{f, g\}$ из $\hat{H}_0^1$ уравнение

$$\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - n^{-1} \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{3}$$

имеет при всяком целом n, таком, что $|n^{-1}|$ достаточно мало, единственное решение $\{u, v\}$, $u, v \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$, удовлетворяющее оценке

$$((u - \alpha_0 Au, u)_0 + \alpha_0 (v, v)_0)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \beta |n|^{-1})^{-1} ((f - \alpha_0 Af, f)_0 + \alpha_0 (g, g)_0)^{1/2}, \tag{4}$$

где α_0 и β — не зависящие от n и $\{f, g\}$ положительные постоянные.

Доказательство. Пусть $u_1 \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ и $v_1 \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ — решения соответственно уравнений

$$u_1 - n^{-2}Au_1 = f \quad \text{и} \quad v_1 - n^{-2}Av_1 = g. \tag{5}$$

Существование таких решений при достаточно малых значениях $|n^{-1}|$ было доказано в лемме 2, гл. XIV, § 1. Тогда функции

$$u = u_1 + n^{-1}v_1, \qquad v = n^{-1}Au_1 + v_1 \tag{6}$$

удовлетворяют (3), т. е. $u - n^{-1}v = f$, $v - n^{-1}Au = g$.

Докажем теперь (4). Заметим, что $Au = n(v - g) \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m) \subseteq H_0^0$, и поэтому, ввиду того что $f, g \in C_0^\infty(R^m)$, имеем $Av = n(Au - Af) \in \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m) \subseteq H_0^0$. Отсюда вследствие (3)

$$\begin{aligned}(f - \alpha_0 Af, f)_0 &= (u - n^{-1}v - \alpha_0 A(u - n^{-1}v), u - n^{-1}v)_0 = \\ &= (u - \alpha_0 Au, u)_0 - 2n^{-1}(u, v)_0 + \alpha_0 n^{-1}(Au, v)_0 + \\ &+ \alpha_0 n^{-1}(Av, u)_0 + n^{-2}(v - \alpha_0 Av, v)_0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\alpha_0(g, g)_0 &= \alpha_0(v - n^{-1}Au, v - n^{-1}Au)_0 = \\ &= \alpha_0(v, v)_0 - \alpha_0 n^{-1}(v, Au)_0 - \alpha_0 n^{-1}(Au, v)_0 + \alpha_0 n^{-2}(Au, Au)_0.\end{aligned}$$

Теперь мы можем, применяя предельный переход, доказать, что условия (9), (10) и (11) из гл. XIV, § 1 выполняются для $f = u$ и $g = v$. Следовательно, согласно неравенству (12) из гл. XIV, § 1, найдется такая положительная постоянная β, что

$$\begin{aligned}&((f - \alpha_0 Af, f)_0 + \alpha_0(g, g)_0)^{1/2} \geqslant \\ &\geqslant ((u - \alpha_0 Au, u)_0 + \alpha_0(v, v)_0 - \alpha_0 |n^{-1}| |(Au, v)_0 - (Av, u)_0| - \\ &\qquad - 2|n^{-1}| |(u, v)_0|^{1/2} \geqslant \\ &\geqslant (1 - \beta |n^{-1}|)((u - \alpha_0 Au, u)_0 + \alpha_0(v, v)_0)^{1/2}\end{aligned}$$

при достаточно больших $|n|$.

Полученная выше оценка для решений $\{u, v\}$, принадлежащих $H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$, показывает, что эти решения однозначно определяются выбором $\{f, g\}$.

Следствие. Произведение пространств $H_0^1 \times H_0^0$, элементами которого служат векторы

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \{u, v\}', \quad \text{где} \quad u \in H_0^1, \ v \in H_0^0, \tag{7}$$

образует B-пространство с нормой

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| = \| \{u, v\}' \| = (B(u, u) + \alpha_0(v, v)_0)^{1/2}, \tag{8}$$

где $B(f, g)$ — продолжение по непрерывности относительно нормы $\| \ \|_1$ билинейного функционала

$$\hat{B}(f, g) = (f - \alpha_0 A f, g)_0,$$

определенного при $f, g \in \hat{H}_0^1$. Мы знаем, что выражение $B(u, u)^{1/2}$ эквивалентно норме $\|u\|_1$ (см. гл. XIV, § 1):

$$\alpha_0 \delta \|u\|_1^2 \leqslant B(u, u) \leqslant (1 + \alpha_0 \gamma) \|u\|_1^2. \tag{9}$$

Будем рассматривать в качестве области определения $D(\mathfrak{A})$ оператора

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

совокупность векторов $\{u, v\}' \in H_0^1 \times H_0^0$, таких, что элементы $u, v \in H_0^0$ выражаются формулами (6). Тогда доказанная выше лемма говорит о том, что область значений оператора

$$\mathfrak{J} - n^{-1}\mathfrak{A}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

содержит все векторы вида $\{f, g\}'$, у которых $f, g \in \hat{H}_0^1$. Поэтому наименьшее замкнутое расширение $\overline{\mathfrak{A}}$ оператора $\mathfrak{A}$ в пространстве $H_0^1 \times H_0^0$ обладает тем свойством, что оператор $(\mathfrak{J} - n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})$ с целочисленным параметром n допускает при достаточно больших $|n|$ обращение $(\mathfrak{J} - n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}$, определенное всюду в $H_0^1 \times H_0^0$ и удовлетворяющее неравенству

$$\|(\mathfrak{J} - u^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}\| \leqslant (1 - \beta |n^{-1}|)^{-1}. \tag{11}$$

Теперь может быть доказана

Теорема. Для любой пары функций $\{f(x), g(x)\}$ из $C_0^\infty(R^m)$ уравнение (1) обладает решением $u(t, x)$ класса C^∞, которое удовлетворяет начальным условиям

$$u(0, x) = f(x), \qquad u_t(0, x) = g(x) \tag{12}$$

и оценке

$$(B(u, u) + \alpha_0 (u_t, u_t)_0)^{1/2} \leqslant \exp(\beta |t|) (B(f, f) + \alpha_0 (g, g)_0)^{1/2}. \tag{13}$$

Замечание. Формула (9) показывает, что $B(u, u)$ играет роль энергии волны — решения $u(t, x)$ уравнения (1), а величину $(u_t, u_t)_0$ можно рассматривать как кинетическую энергию волны $u(t, x)$. Таким образом, (13) выражает тот факт, что полная энергия волны возрастает не быстрее, чем $\exp(\beta |t|)$, когда $t \to \pm\infty$. Такая *энергетическая оценка* вообще характерна для волновых уравнений.

Доказательство теоремы. Оценка (11) показывает, что $\bar{\mathfrak{A}}$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой *группы* T_t класса (C_0) в $H_0^1 \times H_0^0$, которая удовлетворяет условию

$$\|T_t\| \leqslant \exp(\beta|t|), \quad -\infty < t < \infty. \tag{14}$$

По предположению для значений $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\bar{\mathfrak{A}}^k \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathfrak{A}^k \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in C_0^\infty(R^m) \times C_0^\infty(R^m) \subseteq H_0^1 \times H_0^0.$$

Поэтому если положить

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = T_t \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix},$$

то ввиду перестановочности $\bar{\mathfrak{A}}$ с T_t мы получаем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \frac{\partial^k T_t}{\partial t^k} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \bar{\mathfrak{A}}^k \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} \in H_0^1 \times H_0^0$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь через $\partial^k T_t/\partial t^k$ мы обозначаем k-ю сильную производную в пространстве $H_0^1 \times H_0^0$. Учитывая теперь строгую эллиптичность оператора A и то, что $H_0^1 \subseteq H_0^0 = L^2(R^m)$, мы, как и при доказательстве теоремы 2 гл. XIV, § 1, заключаем, что $u(t, x)$ принадлежит по переменным (t, x) при $-\infty < t < \infty$ и $x \in R^m$ классу C^∞ и удовлетворяет уравнению (1) с начальными условиями (12) и оценке (13).

Замечание. Результат, изложенный в этом разделе, взят из работы Иосида [22]. Ср. с работой Лионса [1]. П. Лакс любезно сообщил автору, что метод интегрирования, приведенный в этом разделе, весьма сходен с его методом, указанным в Abstract 180, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58 (1952), 192. Отметим, что наш метод может быть также модифицирован для интегрирования волнового уравнения в открытой области риманова пространства. Существует и другой подход к интегрированию волновых уравнений, основанный на теории диссипативных полугрупп. По этому поводу см. Филлипс [8] и [9]. Последний метод тесно связан с развитой Фридрихсом [2] теорией симметричных положительных систем. Ср. также Лакс — Филлипс [3].

4. Интегрирование неоднородных во времени эволюционных уравнений в рефлексивном B-пространстве

Обратимся к задаче интегрирования уравнения вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{1}$$

Здесь неизвестная функция $x(t)$ рассматривается как элемент некоторого B-пространства X, зависящий от вещественного параметра t,