Доказательство теоремы. Оценка (11) показывает, что $\overline{\mathfrak{A}}$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой *группы* T_t класса (C_0) в $H_0^1 \times H_0^0$, которая удовлетворяет условию

$$\|T_t\| \leqslant \exp(\beta|t|), \quad -\infty < t < \infty. \tag{14}$$

По предположению для значений $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\overline{\mathfrak{A}}^k \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathfrak{A}^k \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in C_0^\infty(R^m) \times C_0^\infty(R^m) \subseteq H_0^1 \times H_0^0.$$

Поэтому если положить

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = T_t \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix},$$

то ввиду перестановочности $\overline{\mathfrak{A}}$ с T_t мы получаем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \frac{\partial^k T_t}{\partial t^k} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{A}}^k \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} \in H_0^1 \times H_0^0$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь через $\partial^k T_t / \partial t^k$ мы обозначаем k-ю сильную производную в пространстве $H_0^1 \times H_0^0$. Учитывая теперь строгую эллиптичность оператора A и то, что $H_0^1 \subseteq H_0^0 = L^2(R^m)$, мы, как и при доказательстве теоремы 2 гл. XIV, § 1, заключаем, что $u(t, x)$ принадлежит по переменным (t, x) при $-\infty < t < \infty$ и $x \in R^m$ классу C^∞ и удовлетворяет уравнению (1) с начальными условиями (12) и оценке (13).

Замечание. Результат, изложенный в этом разделе, взят из работы Иосида [22]. Ср. с работой Лионса [1]. П. Лакс любезно сообщил автору, что метод интегрирования, приведенный в этом разделе, весьма сходен с его методом, указанным в Abstract 180, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 192. Отметим, что наш метод может быть также модифицирован для интегрирования волнового уравнения в открытой области риманова пространства. Существует и другой подход к интегрированию волновых уравнений, основанный на теории диссипативных полугрупп. По этому поводу см. Филлипс [8] и [9]. Последний метод тесно связан с развитой Фридрихсом [2] теорией симметричных положительных систем. Ср. также Лакс — Филлипс [3].

4. Интегрирование неоднородных во времени эволюционных уравнений в рефлексивном B-пространстве

Обратимся к задаче интегрирования уравнения вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\, x(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{1}$$

Здесь неизвестная функция $x(t)$ рассматривается как элемент некоторого B-пространства X, зависящий от вещественного параметра t, а $A(t)$ — заданный, вообще говоря, неограниченный линейный оператор с областями определения $D(A(t))$ и значений $R(A(t))$, лежащими в X, которые также могут зависеть от t.

В работах Като [3], [4] была предпринята первая успешная попытка решения задачи об интегрировании уравнения (1). Т. Като ввел следующие предположения:

1. Область определения $D(A(t))$ не зависит от t и сильно плотна в X, и при $\alpha > 0$ существует резольвента $(I - \alpha A(t))^{-1}$ как ограниченный линейный оператор из $L(X, X)$ с нормой, не превосходящей 1.

2. Оператор $B(t, s) = (I - A(t))(I - A(s))^{-1}$ равномерно ограничен по норме при $t \gtreqless s$.

3. Хотя бы при одном значении s функция $B(t, s)$ имеет по t ограниченную по норме вариацию, т. е. для всякого разбиения сегмента $[a, b]$ вида $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \| B(t_{j+1}, s) - B(t_j, s) \| \leqslant N(a, b) < \infty.$$

4. Хотя бы при одном значении s функция $B(t, s)$ слабо дифференцируема по t и слабая производная $\frac{\partial B(t, s)}{\partial t}$ сильно непрерывна по t.

При указанных условиях Т. Като доказал, что предел

$$U(t, s)x_0 = \underset{\max|t_{j+1} - t_j| \to 0}{s\text{-}\lim} \prod_{j=n-1}^{0} \exp((t_{j+1} - t_j) A(t_j)) x_0$$

существует при всех $x_0 \in X$ и дает единственное решение (1) с начальным значением $x(s) = x_0$ по крайней мере при всех $x_0 \in D(A(s))$.

Метод Като представляет собой по существу абстрактное обобщение классического метода ломаных для обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t)$. Этот прием весьма прост и естествен по идее, но соответствующее доказательство довольно громоздко, так как рассматривается B-пространство общего типа. Като [3] показал, что его доказательство упрощается для случая рефлексивного B-пространства.

Другой метод интегрирования уравнения (1) был предложен Лионсом [2]. Он предположил, что $A(t)$ — эллиптический дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, зависящими от t, и построил обобщенное решение $x(t)$, преобразуя уравнение (1) к интегральной форме в конкретных функциональных пространствах, таких, как пространство Соболева $W^{k,2}(\Omega)$ и некоторые его видоизменения.

Мы не приводим здесь детали исследований Като и Лионса, их можно найти в оригинальных работах Като [3], [4] и Лионса [2]. Мы отсылаем читателя также к статье Ладыженской — Вишика [1], в которой используется идея, аналогичная методу Лионса. Заметим, что цитированная книга Лионса содержит весьма полный список литературы (вплоть до 1961 г.), относящейся к интегрированию эволюционных уравнений.

В этом разделе мы изложим метод интегрирования уравнения (1), опирающийся на некоторую лемму единственности и свойство секвенциальной слабой компактности ограниченных множеств рефлексивного B-пространства. Наша основная идея может быть описана следующим образом.

Если оператор $A(t)=A$ не зависит от t и A служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой полугруппы T_t класса (C_0) в X, то решение $x(t)$ уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b, \quad x(a)=x_0\in D(A), \tag{2}$$

где $D(A)$ — область определения A, выражается формулой

$$x(t)=T_t\cdot x_0=\exp((t-a)A)x_0=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\exp((t-a)A_n)x_0, \tag{3}$$

где $A_n=A(I-n^{-1}A)^{-1}$. Исходя из аналогии с этим случаем, когда A не зависит от времени, предположим, что при наличии зависимости от t оператор $A(t)$ подчиняется следующим двум ограничениям:

A при $a\leqslant t\leqslant b$ является замкнутым линейным оператором с плотными областью определения $D(A(t))\subseteq X$ и областью значений $R(A(t))\subseteq X$, причем при $\lambda\geqslant 0$ существует резольвента $(\lambda I-A(t))^{-1}$, удовлетворяющая при $\lambda\geqslant M$ неравенству $\left\|(I-\lambda^{-1}A(t))^{-1}\right\|\leqslant(1-\lambda^{-1}M)^{-1}$, где M не зависит от λ и t, (4)

сильная производная $dA(t)^{-1}/dt=B(t)$ также существует и сильно непрерывна по t при $a\leqslant t\leqslant b$. (5)

Рассмотрим теперь следующую задачу с начальными условиями:

$$dx_n(t)/dt=A_n(t)x_n(t),\ a\leqslant t\leqslant b,\ x_n(a)=A(a)^{-1}y, \tag{6}$$

где y — произвольный элемент из X и $A_n(t)=A(t)(I-n^{-1}A(t))^{-1}=n(J_n(t)-I)$, $J_n(t)=(I-n^{-1}A(t))^{-1}$. Из (5) следует, что резольвента $J_n(t)$ сильно непрерывно дифференцируема по t, и поэтому $J_n(t)$ равномерно непрерывна по t в операторной норме. Следовательно, задача (6) допускает единственное решение $x_n(t)$, которое, например, можно получить последовательными приближениями, принимая за первое приближение $\exp((t-a)A_n(a))A(a)^{-1}y$. Мы приходим, таким образом, к вопросу об отыскании условий, при которых последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится слабо или сильно к решению $x(t)$ задачи с начальными значениями вида

$$dx(t)/dt = A(t)x(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad x(a) = A(a)^{-1}y. \tag{1'}$$

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы для некоторых частных случаев получить ответ на этот вопрос.

Лемма. Если решение (1') существует, то оно должно удовлетворять неравенству вида

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(a)\| \cdot \exp((t-a)M). \tag{7}$$

Доказательство. Мы следуем здесь рассуждениям, основная идея которых использовалась Като [3]. При $\delta > 0$

$$\begin{aligned} x(t+\delta) &= x(t) + \delta A(t)x(t) + o(\delta) = \\ &= (I+\delta A(t))(I-\delta A(t))(I-\delta A(t))^{-1}x(t) + o(\delta) = \\ &= (I-\delta A(t))^{-1}x(t) - \delta^2 A(t)(I-\delta A(t))^{-1}A(t)x(t) + o(\delta) = \\ &= (I-\delta A(t))^{-1}x(t) - \delta((I-\delta A(t))^{-1} - I)A(t)x(t) + o(\delta). \end{aligned}$$

Из (4) следует, что $s\text{-}\lim\limits_{\delta\downarrow 0}(I-\delta A(t))^{-1}z = z$ при любом $z \in X$ (см. (2) в § 7 гл. IX). Поэтому из оценки (4) мы получаем

$$\|x(t+\delta)\| \leqslant (1-\delta M)^{-1}\|x(t)\| + o(\delta),$$

и, следовательно, $d^+\|x(t)\|/dt \leqslant M\|x(t)\|$. Это и доказывает лемму.

Теорема 1. Допустим, что X —рефлексивное B-пространство, тогда всякая ограниченная последовательность из X содержит слабо сходящуюся к некоторому элементу из X подпоследовательность. Кроме (4) и (5), потребуем также, чтобы выражение

$A(t)B(t) = A(t)\left[dA(t)^{-1}/dt\right]$ было сильно непрерывным по t. (8)

Тогда существует единственное решение $x(t)$ задачи (1') и $x(t) = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$.

Доказательство. Так как $A_n(t) = n(J_n(t) - I)$ и $\|J_n(t)\| \leqslant (1-n^{-1}M)^{-1}$, то при $\delta > 0$ и $n > M$

$$\begin{aligned} &\|(I-\delta A_n(t))x\| = \|(I-\delta n(J_n(t)-I))x\| \geqslant \\ &\geqslant (1+n\delta)\|x\| - \delta n(1-n^{-1}M)^{-1}\|x\| = (1-\delta M(1-n^{-1}M)^{-1})\|x\|. \end{aligned}$$

Поэтому для достаточно малых $\delta > 0$ существует ограниченное обращение $(I-\delta A_n(t))^{-1}$, удовлетворяющее оценке $\|(I-\delta A_n(t))^{-1}\| \leqslant$

$\leqslant (1-\delta M(1-n^{-1}M)^{-1}$. Отсюда, учитывая доказанную лемму, мы видим, что решение $x_n(t)$ задачи (6) удовлетворяет условию

$$\|x_n(t)\| \leqslant \|x_n(a)\| \cdot \exp((t-a)M_1),\quad M_1 \geqslant M(1-n^{-1}M)^{-1}. \tag{9}$$

Таким образом, $x_n(t)$ однозначно определяется начальным условием $x_n(a)=A(a)^{-1}y$, и мы можем положить

$$x_n(t)=U_n(t,\ a)\,x_n(a)=U_n(t,\ a)\,A(a)^{-1}y,$$

где

$$\|U_n(t,\ a)\| \leqslant \exp((t\quad a)M_1). \tag{10}$$

Положим теперь

$$y_n(t)=A_n(t)\,U_n(t,\ a)\,A(a)^{-1}y=A_n(t)\,x_n(t)=dx_n(t)/dt. \tag{11}$$

Из (5) следует, что оператор $A_n(t)$ сильно непрерывно дифференцируем по t и

$$dA_n(t)/dt=-A_n(t)\,B(t)\,A_n(t), \tag{12}$$

так как

$$\delta^{-1}(A_n(1+\delta)-A_n(t))=-A_n(t+\delta)\{[A_n(t+\delta)^{-1}-A_n(t)^{-1}]/\delta\}A_n(t),$$
$$A_n(t)^{-1}=A(t)^{-1}-n^{-1}I.$$

Поэтому $y_n(t)$ служит решением задачи с начальным условием вида

$$\frac{dy_n(t)}{dt}=A_n(t)\,y_n(t)-A_n(t)\,B(t)\,y_n(t),\quad a\leqslant t\leqslant b,$$
$$y_n(a)=J_n(a)\,y. \tag{13}$$

Учитывая (8), мы заключаем, что выражение $A_n(t)\,B(t)=J_n(t)\,A(t)\,B(t)$ сильно непрерывно по t, и поэтому ввиду (4) равномерно ограничено по t и n. Следовательно,

$$\|A_n(t)\,B(t)\| \leqslant C \text{ при } a\leqslant t\leqslant b \text{ и } n>M\quad (C<\infty). \tag{14}$$

При $\delta>0$ имеем $y_n(t+\delta)=y_n(t)+\delta A_n(t)\,y(t)-\delta A_n(t)\,B(t)\,y_n(t)+{}$ $+o(\delta)$. Отсюда, как и при доказательстве леммы, мы получаем

$$d^+\|y_n(t)\|/dt \leqslant (M_1+C)\|y_n(t)\|,$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\|y_n(t)\| &\leqslant \|y_n(a)\|\exp((t-a)(M+C))= \\ &=\|J_n(a)\,y\|\cdot\exp((t-a)(M_1+C))\leqslant \\ &\leqslant (1-n^{-1}M)^{-1}\exp((t-a)(M_1+C))\|y\|.\end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда, поскольку $dx_n(t)/dt=y_n(t)$, мы видим, что функция $x_n(t)$ ограничена и сильно непрерывна по t равномерно относительно t и n. Из рефлексивности X теперь следует, что найдется такая подпоследовательность $\{n'\}$ натурального ряда $\{n\}$, что одновременно для всех $t \in [a, b]$ существует слабый предел $w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} x_{n'}(t) = x(t)$.

Покажем теперь, что

$$x(t) \in D(A(t)) \quad \text{и функция} \quad A(t)\,x(t) = w\text{-}\lim_{n' \to \infty} A_{n'}(t)\,x_{n'}(t) \tag{16}$$
$$\text{ограничена и сильно измерима по } t.$$

Для этого мы сначала докажем, что $A(t)\,x(t)$ сильно непрерывна по t. В приводимом ниже доказательстве мы используем тот факт, что для сопряженных операторов (см. теорему 1 из гл. VIII, § 6) имеют место соотношения

$$\begin{gathered} J_n(t)' = \left(\left(I - n^{-1}A(t)\right)^{-1}\right)' = \left(I' - n^{-1}A(t)'\right)^{-1}, \\ \left(A(t)^{-1}\right)' = \left(A(t)'\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{17}$$

Так как X рефлексивно, то, как будет показано ниже, $D(A(t)')$ сильно плотно в сопряженном пространстве X'. Поэтому из неравенства $\| J_n(t)' \| \leqslant \left(1 - n^{-1}M\right)^{-1}$, которое следует из (4) и (17), вытекает, что $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} J_n(t)'f' = f'$ при любом $f' \in X'$. Следовательно, поскольку $w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} x_{n'}(t) = x(t)$, мы приходим к тому, что

$$w\text{-}\lim_{n' \to \infty} J_{n'}(t)\,x_{n'}(t) = x(t). \tag{18}$$

Соотношения (17) показывают, что

$$\langle A(t)\,J_n(t)\,x_n(t),\ \left(A(t)^{-1}\right)'f' \rangle = \langle J_n(t)\,x_n(t),\ f' \rangle,$$

и поэтому ввиду (18)

$$\lim_{n \to \infty} \langle A(t)\,J_{n'}(t)\,x_{n'}(t),\ \left(A(t)^{-1}\right)' f' \rangle = \langle x(t),\ f' \rangle. \tag{19}$$

Теперь из (17) мы выводим, что область значений $R\left(\left(A(t)^{-1}\right)'\right) = D(A(t)')$ сильно плотна в X'. Действительно, если допустить противное, то рефлексивность X гарантирует существование такого элемента $w_0 \in X$, $w_0 \neq 0$, что $0 = \langle w_0,\ \left(A(t)^{-1}\right)'f' \rangle = \langle A(t)^{-1}w_0,\ f' \rangle$. Отсюда следует, что $A(t)^{-1}w_0 = 0$, т. е. $w_0 = 0$, что противоречит сделанным допущениям. Поэтому, поскольку функция $y_n(t) = A_n(t)\,x_n(t)$ ограничена по t и n, мы заключаем, что должен существовать слабый предел $w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} A_{n'}(t)\,x_{n'}(t) = u(t)$. Из (19) видно, что $\langle u(t),\ \left(A(t)^{-1}\right)'f' \rangle = \langle x(t),\ f' \rangle$, так что $A(t)^{-1}u(t) = x(t)$.

Из сильной непрерывности $A_n(t)\,x_n(t)$ по t следует, что замыкание множества $\{A_n(t)\,x_n(t);\ a \leqslant t \leqslant b,\ n = 1, 2, \ldots\}$ сепарабельно, и поэтому из слабой измеримости $u(t) = w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} A_{n'}(t)\, x_{n'}(t)$ по t, согласно теореме Петтиса из гл. V, § 4, вытекает сильная измеримость. Чтобы доказать, что $u(t)$ сильно непрерывно по t, перепишем (13) в интегральной форме

$$y_n(t) = U_n(t, a)\, y_n(a) - \int_a^t U_n(t, s)\, A_n(s)\, B(s)\, y_n(s)\, ds. \tag{20}$$

Второй член в правой части (20) равномерно относительно t и n сильно непрерывен по t — это следует из (10), (14) и ограниченности $y_n(t)$ по t и n. Первый член в правой части $U_n(t, a)\, y_n(a)$ будет сильно непрерывным по t равномерно относительно t и n, если выражение $A_n(a)\, y_n(a) = A(a)\, J_n(a)\, J_n(a)\, y$ окажется ограниченным по n. Последнее легко устанавливается способом, который был использован выше при доказательстве сильной непрерывности по t функции $x_n(t) = U_n(t, a)\, x_n(a)$. Но $A_n(a)\, y_n(a) = A(a)\, J_n(a)\, J_n(a)\, y$ ограничено по n, если y принадлежит области $D(A(a))$ определения оператора $A(a)$, которая сильно плотна в X. Отсюда на основании леммы мы заключаем, что первый член в правой части (20) сильно непрерывен по t равномерно относительно t и n при всяком $y \in X$. Итак, функция $y_n(t)$ сильно непрерывна по t равномерно относительно t и n. Это показывает, что слабый предел $u(t) = A(t)\, x(t) = w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} y_{n'}(t)$ сильно непрерывен по t. Далее, устремляя $n' \to \infty$ в соотношении

$$x_{n'}(t) = x_{n'}(a) + \int_a^t A_{n'}(s)\, x_{n'}(s)\, ds = A(a)^{-1} y + \int_a^t A_{n'}(s)\, x_{n'}(s)\, ds,$$

мы находим, что

$$x(t) = A(a)^{-1} y + \int_a^t A(s)\, x(s)\, ds. \tag{21}$$

Поэтому ввиду сильной непрерывности $u(t) = A(t)\, x(t)$ по t уравнение (1) удовлетворяется. Поскольку решение $x(t)$, согласно лемме, однозначно определяется начальным значением $x(a)$, мы видим, что сама последовательность $\{x_n(t)\}$ должна слабо сходиться к $x(t)$.

Замечание. Приведенный выше результат взят из работы Иосида [28]. Как указал автору Т. Като, из нашего условия (8) следует, что область определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ не зависит от t. Действительно, положим $A(t)\left(dA(t)^{-1}/dt\right) = C(t)$ и пусть $W(t)$ — решение уравнения $dW/dt = -C(t)\, W(t)$ с условием $W(a) = I$. Тогда

$$d\left(A(t)^{-1} W(t)\right)/dt = A(t)^{-1} C(t)\, W(t) - A(t)^{-1} C(t)\, W(t) = 0,$$

и поэтому

$$A(a)^{-1}W(a)=A(a)^{-1}=A(t)^{-1}W(t).$$

Это и показывает, что область $D(A(t))=R\left(A(t)^{-1}\right)$ не зависит от t.

Теорема 2. Пусть X — гильбертово пространство. Предположим, что, кроме (4) и (5), $A(t)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

оператор $A(t)$ — самосопряженный и

$$(A(t)x,\ x)\leqslant -\|x\|^2 \text{ при } x\in D(A(t)), \tag{22}$$

существует такая постоянная α, $2^{-1}\leqslant\alpha\leqslant 1$, что функция $(-A(t))^{\alpha}B(t)$ ограничена по t по операторной норме. (23)

Спектральное разложение $A(t)=\int\limits_{-\infty}^{-1}\lambda\, dE_t(\lambda)$ позволяет определить здесь с помощью формулы

$$(-A(t))^{\alpha}=\int\limits_{-\infty}^{-1}(-\lambda)^{\alpha}\,dE_t(\lambda) \tag{24}$$

дробную степень $(-A(t))^{\alpha}$.

При этих условиях последовательность $\{x_n(t)\}$ слабо сходится к единственным образом определенному сильно непрерывному решению интегрального уравнения (21).

Доказательство. Доказательство теоремы 1 показывает, что нам нужно лишь убедиться в равномерной ограниченности $\{y_n(t)\}$ по t и n.

Воспользуемся равенством

$$\frac{d}{dt}\|y_n(t)\|^2=2\operatorname{Re}\left(\frac{dy_n(t)}{dt},\ y_n(t)\right)=2\operatorname{Re}(A_n(t)\,y_n(t),\ y_n(t))-$$
$$-2\operatorname{Re}(A_n(t)\,B(t)\,y_n(t),\ y_n(t)). \tag{25}$$

Так как оператор $-A_n(t)=-A(t)(I-n^{-1}A(t))^{-1}$ самосопряжен и, так же как и $-A(t)$, неотрицателен, неравенство Шварца приводит к условию

$$|\operatorname{Re}(A_n(t)B(t)x,\ x)|\leqslant\left|\left((-A_n(t))^{\alpha}B(t)x,\ (-A_n(t))^{1-\alpha}x\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\|(-A_n(t))^{\alpha}B(t)x\right\|\cdot\|(-A_n(t))^{1-\alpha}x\|\leqslant$$
$$\leqslant 2^{-1}\varepsilon\left\|(-A_n(t))^{\alpha}B(t)x\right\|^2+2^{-1}\varepsilon^{-1}\left\|(-A_n(t))^{1-\alpha}x\right\|^2,$$

которое справедливо при любом $\varepsilon>0$. Так как

$$A_n(t)=A(t)\,J_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{-1}\lambda(1-n^{-1}\lambda)^{-1}\,dE_t(\lambda),$$

спектр $-A_n(t)$ лежит в интервале $\left[(1-\alpha^{-1})^{-1}, \infty\right)$. А так как $2^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1$, мы видим, что если значение $\varepsilon > 0$ выбрано соответствующим образом, то при всех t и n

$$2^{-1}\varepsilon^{-1}\left\|(-A_n(t))^{1-\alpha}x\right\|^2 \leqslant \left\|(-A_n(t))^{1/2}x\right\|^2 = (-A_n(t)x, x).$$

Отсюда мы заключаем на основании (22) и (23), что правая часть (25) меньше, чем

$$2^{-1}\varepsilon\left\|(-A_n(t))^{\alpha}B(t)y_n(t)\right\|^2 =$$
$$= 2^{-1}\varepsilon\left\|J_n(t)^{\alpha}(-A(t))^{\alpha}B(t)y_n(t)\right\|^2 \leqslant K\|y_n(t)\|^2,$$

где K не зависит от t и n.

Следовательно, $\|y_n(t)\| \leqslant \|y_n(a)\| \cdot \exp\left((t-a)K^{1/2}\right)$, и поэтому функция $y_n(t)$ ограничена по t и n.

Замечание. Пусть $X = L^2(0, 1)$ и $A(t)$ — оператор умножения на $-\left(1+|t-s|^{-\beta}\right)$ в пространстве $L^2(0, 1)$:

$$A(t)x(s) = -\left(1+|t-s|^{-\beta}\right)x(s).$$

Если $\beta \geqslant 2$, то, выбирая $\alpha \geqslant 1/2$ так, чтобы $\beta(1-\alpha)-1 \geqslant 0$, мы убеждаемся в том, что условия теоремы (2) выполняются. Аналогичный случай был недавно изучен Танабе [1]. Нам кажется, что метод Танабе не может быть применен к случаю $\beta = 1$. При $\beta = 1$ мы имеем $B(t) = (1+|t-s|)^{-2}$, если $t > s$, и $B(t) = -(1+|t-s|)^{-2}$, если $t < s$. Значит, правая часть (25) в этом случае неположительна, и поэтому $\|y_n(t)\| \leqslant \|y_n(a)\|$. Теорема 2, таким образом, применима и при $\beta = 1$.

Литература. Идея аппроксимации решений уравнения (1) решениями уравнений (6) была впервые предложена автором (см. Иосида [23]). В этой статье не предполагалось, что B-пространство X рефлексивно. Уравнение (1) рассматривалось в пространстве L^1 в предположении, что $A(t)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого подчиняются сильным требованиям гладкости. Доказано, что аппроксимирующие решения $x_n(t) \in L^1$ стремятся при $n \uparrow \infty$ к обобщенному решению дифференциального уравнения (1). Тот факт, что предельная функция $x(t)$ является классическим решением уравнения (1), доказывался с помощью подходящим образом подобранного *параметрикса* уравнения, *сопряженного* (1):

$$-dy(s)/ds = A^*(s)y(s),$$

где $A^*(s)$ — оператор, формально сопряженный $A(s)$ (см., например, Иосида [24] и [25]). Ср. также с работой С. Ито [1]. Как указал Кисынский [1] в замечании при чтении корректуры, требование рефлексивности пространства X в теореме (1) может быть опущено,