## 5. Метод Танабе и Соболевского

Пусть $X$ — комплексное $B$-пространство. Рассмотрим в $X$ эволюционное уравнение с заданной *неоднородностью* $f(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{1}$$

В этом случае решение $x(t) \in X$, удовлетворяющее начальному условию $x(a) = x_0 \in X$, формально может быть получено с помощью так называемого *принципа Дюамеля* из решения $\exp((t-a)A)x$ *однородного уравнения* $dx/dt = Ax$:

$$x(t) = \exp((t-a)A)x_0 + \int_a^t \exp((t-s)A) \cdot f(s)\, ds. \tag{2}$$

Это приводит к мысли о том, что неоднородное во времени уравнение вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{3}$$

может быть решено в пространстве $X$ с помощью следующей формальной процедуры. Перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(a)x(t) + (A(t) - A(a))x(t). \tag{4}$$

Согласно (2), решение $x(t)$ уравнения (4) с начальным условием $x(a) = x_0$ будет выражаться как решение абстрактного интегрального уравнения

$$x(t) = \exp((t-a)A(a))x_0 + \int_a^t \exp((t-s)A(s))(A(s) - A(a))x(s)\, ds. \tag{5}$$

Применяя для решения (5) формальный метод последовательных приближений, мы получаем приближенные решения:

$$x_1(t) = \exp((t-a)A(a))x_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1}(t) = \exp((t-a)A(a))x_0 + \\ + \int_a^t \exp((t-s)A(s))(A(s) - A(a))x_n(s)\, ds.$$

Таким образом, решение $x(t)$ уравнения (5) будет формально представляться формулой

$$x(t) = \exp((t-a)A(a))x_0 + \int_a^t \exp((t-s)A(s))R(s, a)x_0\, ds, \tag{6}$$

где

$$R(t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t, s),$$

$$R_1(t, s) = \begin{cases} (A(t) - A(s)) \exp((t-s) A(s)) & \text{при } s < t, \\ 0 & \text{при } s \geqslant t, \end{cases} \tag{7}$$

$$R_m(t, s) = \int_s^t R_1(t, \sigma) R_{m-1}(\sigma, s) d\sigma \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

Танабе [2] обосновал описанную выше формальную процедуру интегрирования, используя теорию голоморфных полугрупп (она изложена в гл. IX, § 10). Следуя методу Танабе, мы допустим, что выполняются следующие условия:

$A(t)$ при всяком $t \in [a, b]$ представляет собой замкнутый линейный оператор с плотной в $X$ областью определения и областью значений $X$, причем резольвентное множество $\rho(A(t))$ оператора $A(t)$ содержит некоторую фиксированную угловую область $\Theta$ комплексной $\lambda$-плоскости, состоящую из начала координат 0 и множества (8)

$$\{\lambda; -\theta < \arg \lambda < \theta\}, \text{ где } \theta > \frac{\pi}{2}.$$

Резольвента $(\lambda I - A(t))^{-1}$ сильно непрерывна по $t$, равномерно относительно значений $\lambda$ из любого бикомпактного множества, лежащего в $\Theta$.

Существуют такие положительные постоянные $M$ и $N$, что при $\lambda \in \Theta$ и $t \in [a, b]$

$$\|(\lambda I - A(t))^{-1}\| \leqslant N(|\lambda| - M)^{-1}, \tag{9}$$

если $|\lambda| > M$, причем для вещественных значений $\lambda$ можно положить $N = 1$.

Область определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ не зависит от $t$, так что по теореме о замкнутом графике из гл. II, § 6, оператор $A(t) A(s)^{-1}$ принадлежит $L(X, X)$. Пусть также существует такая положительная постоянная $K$, что при $s, t, r \in [a, b]$ (10)

$$\|A(t) A(s)^{-1} - A(r) A(s)^{-1}\| \leqslant K |t - r|.$$

При этих условиях может быть доказана следующая

**Теорема.** При любых $x_0 \in X$ и $s \in [a, b)$ уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t) x(t), \qquad x(s) = x_0, \quad s < t \leqslant b, \tag{3'}$$

обладает единственным решением $x(t) \in X$. Это решение выражается формулой

$$x(t) = U(t, s)\, x(s) = U(t, s)\, x_0, \tag{11}$$

где

$$U(t, s) = \exp((t-s)A(s)) + W(t, s),$$

$$W(t, s) = \int_s^t \exp((t-\sigma)A(\sigma))\, R(\sigma, s)\, d\sigma, \tag{12}$$

$R(t, s)$ выражается формулой (7).

Для доказательства нам потребуются следующие три леммы.

**Лемма 1**. Функция $R(t, s)$ сильно непрерывна при $a \leqslant s < t \leqslant b$, и существует такая постоянная $C$, что

$$\|R(t, s)\| \leqslant KC \cdot \exp(KC(t-s)). \tag{13}$$

**Доказательство.** Из (8) и (9) следует, что каждый оператор $A(s)$ порождает некоторую голоморфную полугруппу, определяемую (см. гл. IX, § 10) выражением

$$\exp(tA(s)) = (2\pi i)^{-1} \int_{C'} e^{\lambda t} (\lambda I - A(s))^{-1}\, d\lambda, \tag{14}$$

где $C'$ — гладкий контур, соединяющий в $\Theta$ точки $\infty e^{-i\theta}$ и $\infty e^{i\theta}$.

Следовательно, поскольку $A(s)(\lambda I - A(s)) = \lambda(\lambda I - A(s))^{-1} - I$, при $(b-a) > t > 0$

$$\|\exp(tA(s))\| \leqslant C \text{ и } \|A(s)\exp(tA(s))\| \leqslant Ct^{-1}, \tag{15}$$

где положительная постоянная $C$ не зависит от $t > 0$ и $s \in [a, b]$. Из (7) следует, что

$$R_1(t, s) = (A(t) - A(s))\, A(s)^{-1} A(s) \exp((t-s)A(s)),\ t > s,$$

и поэтому ввиду (10) и (15)

$$\|R_1(t, s)\| \leqslant KC. \tag{16}$$

Из (8) и (14) с очевидностью следует также, что функция $R_1(t, s)$ сильно непрерывна в области $a \leqslant s < t \leqslant b$. Продолжая этот процесс, мы по индукции заключаем, что

$$\begin{aligned} \|R_m(t, s)\| &\leqslant \int_s^t \|R_1(t, \sigma)\| \cdot \|R_{m-1}(\sigma, s)\|\, d\sigma \leqslant \\ &\leqslant \int_s^t (KC)^m (\sigma - s)^{m-2} ((m-2)!)^{-1}\, d\sigma = \\ &= (KC)^m (t-s)^{m-1} ((m-1)!)^{-1}, \end{aligned}$$

и поэтому (13) действительно выполняется. Аналогичным способом можно доказать сильную непрерывность $R(t, s)$ при $a \leqslant s < t \leqslant b$.

**Лемма 2.** Для значений $s < \tau < t$ имеет место неравенство

$$\|R(t, s) - R(\tau, s)\| \leqslant C_1\left(\frac{t-\tau}{t-s} + (t-\tau)\ln\frac{t-s}{t-\tau}\right), \tag{17}$$

где положительная постоянная $C_1$ не зависит от $s$, $\tau$ и $t$.

**Доказательство.** Из (7) мы получаем

$$R_1(t, s) - R_1(\tau, s) = (A(t) - A(\tau))\exp((t-s)A(s)) + \\ + (A(\tau) - A(s))[\exp((t-s)A(s)) - \exp((\tau-s)A(s))].$$

Условия (10) и (15) показывают, что норма первого члена в правой части мажорируется величиной $KC(t-\tau)(t-s)^{-1}$. Второй член в правой части может быть записан как

$$(A(\tau) - A(s))\int_{\tau-s}^{t-s}\frac{d}{d\sigma}\exp(\sigma A(s))\,d\sigma = \\ = (A(\tau) - A(s))A(s)^{-1}\int_{\tau-s}^{t-s}A(s)^2\exp(\sigma A(s))\,d\sigma,$$

и ввиду (15)

$$\left\|\int_{\tau-s}^{t-s}A(s)^2\exp(\sigma A(s))\,d\sigma\right\| \leqslant \int_{\tau-s}^{t-s}\|(A(s)\exp(2^{-1}\sigma A(s)))^2\|\,d\sigma \leqslant \\ \leqslant \int_{\tau-s}^{t-s}(2C/\sigma)^2\,d\sigma = 4C^2\left[-\frac{1}{\sigma}\right]_{\tau-s}^{t-s} = 4C^2(t-\tau)(t-s)^{-1}(\tau-s)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\|R_1(t, s) - R_1(\tau, s)\| \leqslant KC(1+4C)\frac{t-\tau}{t-s}. \tag{18}$$

С другой стороны, вследствие (7)

$$\sum_{m=2}^{\infty}R_m(t, s) - \sum_{m=2}^{\infty}R_m(\tau, s) = \int_s^t R_1(t, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma - \\ - \int_s^\tau R_1(\tau, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma = \\ = \int_\tau^t R_1(t, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma + \int_s^\tau (R_1(t, \sigma) - R_1(\tau, \sigma))R(\sigma, s)\,d\sigma.$$

Норма первого слагаемого в правой части последнего равенства мажорируется выражением

$$\int_{\tau}^{t} \| R_1(t, \sigma)\| \cdot \| R(\sigma, s)\| d\sigma \leqslant K^2C^2 \exp(KC(b-a))(t-\tau).$$

Норма второго члена ввиду (13) и (18) не превосходит

$$\int_{s}^{\tau} \| R_1(t, \sigma) - R_1(\tau, \sigma)\| \cdot \| R(\sigma, s)\| d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant K^2C^2(1+4C)\exp(KC(b-a))\int_{s}^{\tau}(t-\tau)(t-\sigma)^{-1}\,d\sigma =$$

$$= K_1(t-\tau)\ln\frac{t-s}{t-\tau}.$$

Отсюда и следует (17).

**Лемма 3.** При $s < t$

$$\| A(t)\{\exp((t-s)A(t)) - \exp((t-s)A(s))\}\| \leqslant C_2, \tag{19}$$

где положительная постоянная $C_2$ не зависит от $s$ и $t$.

**Доказательство.** Из (14) получаем

$$A(t)\{\exp((t-s)A(t)) - \exp((t-s)A(s))\} =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{C} e^{\lambda(t-s)}A(t)(\lambda I - A(t))^{-1}(A(t)-A(s))(\lambda I - A(s))^{-1}\,d\lambda.$$

С другой стороны, $A(t)(\lambda I - A(t))^{-1} = \lambda(\lambda I - A(t))^{-1} - I$, и поэтому ввиду (19)

$$\| A(t)(\lambda I - A(t))^{-1}\| \leqslant \frac{|\lambda|}{|\lambda| - M} + 1 \text{ при } \lambda \in \Theta \text{ и } t \in [a, b]. \tag{20}$$

Отсюда с помощью (10) и неравенства

$$\|(A(t)-A(s))(\lambda I - A(s))^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\| \cdot \| A(s)(\lambda I - A(s))^{-1}\|$$

мы и получаем (19).

**Доказательство теоремы.** Перепишем выражение $W(t, s)$ из (12) в следующем виде:

$$W(t, s) = \int_{s}^{t}\exp((t-\tau)A(t))R(t, s)\,d\tau +$$

$$+ \int_{s}^{t}\{\exp((t-\tau)A(\tau)) - \exp((t-\tau)A(t))\}R(\tau, s)\,d\tau +$$

$$+ \int_{s}^{t}\exp((t-\tau)A(t))(R(\tau, s) - R(t, s))\,d\tau.$$

Аппроксимируя интегралы римановыми суммами и используя свойство замкнутости оператора $A(t)$, мы видим, что можно применить $A(t)$ к каждому члену правой части написанного равенства. Действительно, согласно (19), ко второму члену из правой части оператор $A(t)$ можно применить. К третьему члену $A(t)$ можно применить ввиду (15) и (17). Кроме того,

$$A(t)\int_s^t \exp((t-\tau)A(t))R(t, s)\,d\tau = \{\exp((t-s)A(t)) - I\}R(t, s),$$

так как $A(t)\exp((t-\tau)A(t)) = -d\exp((t-\tau)A(t))/d\tau$. Отсюда мы находим, что

$$\begin{aligned} A(t)U(t, s) = A(t)\exp((t-s)A(s)) + \{\exp((t-s)A(t)) - I\}R(t, s) + \\ + \int_s^t A(t)\{\exp((t-\tau)A(\tau)) - \exp((t-\tau)A(t))\}R(\tau, s)\,d\tau + \\ + \int_s^t A(t)\exp((t-\tau)A(t))(R(\tau, s) - R(t, s))\,d\tau. \quad (21)\end{aligned}$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что оператор $A(t)U(t, s)$ сильно непрерывен в области $a \leqslant s < t \leqslant b$ и

$$\|A(t)W(t, s)\| \leqslant C_3 \quad \text{и} \quad \|A(t)U(t, s)\| \leqslant C_3(t-s)^{-1}, \quad (22)$$

где положительная постоянная $C_3$ не зависит от $s$ и $t$.

Определим теперь для значений $s < (t-h) < t$ выражение

$$U_h(t, s) = \exp((t-s)A(s)) + \int_s^{t-h} \exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau, s)\,d\tau. \quad (23)$$

Голоморфная полугруппа $\exp(tA(u))$ дифференцируема при $t > 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s) = A(s)\exp((t-s)A(s)) + \exp(hA(t-h))R(t-h, s) + \\ + \int_s^{t-h} A(\tau)\exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau, s)\,d\tau.\end{aligned}$$

Отсюда ввиду (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s) - A(t)U_h(t, s) = \exp(hA(t-h))R(t-h, s) - R_1(t, s) - \\ - \int_s^{t-h} R_1(t, \tau)R(\tau, s)\,d\tau. \quad (24)\end{aligned}$$

Из (8), (13) и (14) следует, что $\exp(hA(t-h))R(t-h, s)$ при $h \downarrow 0$ сильно сходится к $R(t, s)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\operatorname*{s\text{-}lim}_{h\downarrow 0}\left(\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s) - A(t)U_h(t, s)\right)x_0 = \\ &\quad = \left(R(t, s) - R_1(t, s) - \int\limits_s^t R_1(t, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma\right)x_0, \quad x_0 \in X. \end{aligned} \tag{25}$$

Правая часть (25), как это можно показать, используя (7), обращается в нуль. Так как

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{h\downarrow 0} A(t)U_h(t, s)x_0 = A(t)U(t, s)x_0,$$

то, применяя рассуждения, использованные при выводе (21), мы получаем из (25) соотношение

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{h\downarrow 0}\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s)x_0 = A(t)U(t, s)x_0 \text{ при } t > 0 \text{ и } x_0 \in X. \tag{26}$$

Так как правая часть (26) сильно непрерывна при $t > s$, то интегрируя (26) и учитывая, что $\operatorname*{s\text{-}lim}_{h\downarrow 0} U_h(t, s)x_0 = U(t, s)x_0$, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)x_0 = A(t)U(t, s)x_0 \text{ при } t > s \text{ и } x_0 \in X. \tag{27}$$

Таким образом, $x(t) = U(t, s)x_0$ служит решением уравнения (3′). Единственность полученного решения может быть доказана аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе.

## Литературные указания и замечания

Формулировка приведенной выше теоремы и доказательство заимствованы из работы Танабе [2]. Для того чтобы более четко проиллюстрировать идею Танабе, мы несколько усилили условия его теоремы. Так, например, условие (9) можно заменить более слабым требованием

$$\|A(t)A(s)^{-1} - A(r)A(s)^{-1}\| \leqslant K_1|t-r|^{\rho}, \text{ где } 0 < \rho < 1.$$

По поводу деталей мы отсылаем к цитированной выше работе Танабе, которая представляет собой усовершенствованный вариант статей Танабе [3] и [4]. Следует заметить, что аналогичные методы были независимо развиты советскими математиками. См., например, статью Соболевского [1] и литературу, указанную в этой работе.