Из (8), (13) и (14) следует, что $\exp(hA(t-h))R(t-h, s)$ при $h\downarrow 0$ сильно сходится к $R(t, s)$. Поэтому

$$\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\left(\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s)-A(t)U_h(t, s)\right)x_0=$$
$$=\left(R(t, s)-R_1(t, s)-\int_s^t R_1(t, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma\right)x_0,\quad x_0\in X. \tag{25}$$

Правая часть (25), как это можно показать, используя (7), обращается в нуль. Так как

$$\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\, A(t)U_h(t, s)x_0=A(t)U(t, s)x_0,$$

то, применяя рассуждения, использованные при выводе (21), мы получаем из (25) соотношение

$$\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s)x_0=A(t)U(t, s)x_0 \text{ при } t>0 \text{ и } x_0\in X. \tag{26}$$

Так как правая часть (26) сильно непрерывна при $t>s$, то интегрируя (26) и учитывая, что $\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\, U_h(t, s)x_0=U(t, s)x_0$, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)x_0=A(t)U(t, s)x_0 \text{ при } t>s \text{ и } x_0\in X. \tag{27}$$

Таким образом, $x(t)=U(t, s)x_0$ служит решением уравнения (3′). Единственность полученного решения может быть доказана аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе.

Литературные указания и замечания

Формулировка приведенной выше теоремы и доказательство заимствованы из работы Танабе [2]. Для того чтобы более четко проиллюстрировать идею Танабе, мы несколько усилили условия его теоремы. Так, например, условие (9) можно заменить более слабым требованием

$$\|A(t)A(s)^{-1}-A(r)A(s)^{-1}\|\leqslant K_1|t-r|^{\rho}, \text{ где } 0<\rho<1.$$

По поводу деталей мы отсылаем к цитированной выше работе Танабе, которая представляет собой усовершенствованный вариант статей Танабе [3] и [4]. Следует заметить, что аналогичные методы были независимо развиты советскими математиками. См., например, статью Соболевского [1] и литературу, указанную в этой работе.

Исследования Коматсу. В работе Коматсу [1] сделано одно важное замечание, относящееся к изложенному выше результату Танабе. Пусть Δ — некоторая выпуклая комплексная окрестность вещественного сегмента $[a, b]$, вложенного в комплексную плоскость. Допустим, что оператор $A(t)$ определен при $t \in \Delta$ и удовлетворяет требованиям (8) и (9) (с заменой условия $t \in [a, b]$ на $t \in \Delta$)). Кроме того, допустим, что существует ограниченный линейный оператор A_0, отображающий X взаимно однозначно на область определения D оператора $A(t)$, которая предполагается не зависящей от t, причем функция $B(t) = A(t) A_0$ сильно голоморфна при $t \in \Delta$. При этих предположениях Коматсу показал, что построенный выше оператор $U(t, s)$ сильно голоморфен при $t \in \Delta$, если $|\arg(t-s)| < \theta_0$ при некотором θ_0, $0 < \theta_0 < \pi/2$. Этот результат может быть использован для установления свойства «однозначности продолжения вперед и назад» решений неоднородных во времени уравнений диффузии, о котором говорилось в § 1 гл. XIV. По этому поводу мы отсылаем читателей к работам Коматсу [2], [3] и Котаке — Нарасимхана [1].

Исследования Като. Для того чтобы освободиться от условия независимости области $D(A(t))$ от t, Като [6] доказал, что в приведенной выше теореме условие (10) можно заменить следующим:

при некотором положительном целом k область $D((-A(t))^{1/k})$ не зависит от t. (Здесь $(-A(t))^{1/k}$ — дробная степень, определенная в гл. IX, § 11.) Кроме того, существуют постоянные

$$K_2 > 0 \text{ и } \gamma,\ 1 - k^{-1} < \gamma \leqslant 1, \tag{10'}$$

такие, что

$$\left\| (-A(t))^{1/k} (-A(s))^{1/k} - I \right\| \leqslant K_2 |t-s|^{\gamma}$$

при s, $t \in [a, b]$.

Некоторые результаты последних работ Танабе и Като — Танабе. Имея в виду ту же цель, что и Като в упомянутой выше работе, Танабе [1] разработал метод, позволяющий заменить условие (10) условием

оператор $A(t)^{-1}$ имеет при $a \leqslant t \leqslant b$ сильную первую производную, такую, что при некоторых положительных постоянных K_3 и α выполняется неравенство

$$\left\| \frac{dA(t)^{-1}}{dt} - \frac{dA(s)^{-1}}{ds} \right\| \leqslant K_3 |t-s|^{\alpha}. \tag{10''}$$

Кроме того, существуют такие постоянные $N > 0$ и ρ, $0 < \rho < 1$, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\lambda I - A(t))^{-1} \right\| \leqslant N |\lambda|^{\rho - 1}.$$

Подробнее по этому поводу см. Като — Танабе [8]. Укажем, что идея этого исследования заключается в использовании выражения $\exp((t-a)A(t))x_0$ в качестве первого приближения вместо функции $\exp((t-a)A(a))x_0$.

Исследования Нельсона, касающиеся фейнмановских интегралов. В работе Нельсона [2] дается интерпретация фейнмановских интегралов, связанная с интегрированием уравнения Шредингера методом полугрупп.

Исследования Агмона и Ниренберга. Агмон и Ниренберг [1] изучали поведение решений уравнения $\frac{1}{i}\frac{du}{dt}-Au=0$ при $t\uparrow\infty$ в некоторых B-пространствах.