Введение

В этой главе мы хотим ввести некоторые понятия и сформулировать ряд теорем, которые в дальнейшем будут постоянно использоваться. Эти понятия и теоремы относятся к теории множеств, топологическим пространствам, пространствам с мерой и линейным пространствам.

1. Теория множеств

Множества. Запись $x \in X$ означает, что x является *элементом* множества X; $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X. Множество, состоящее из всех x, обладающих некоторым свойством P, мы обозначим через $\{x;\ P\}$. Таким образом, $\{y;\ y = x\}$ — это множество, состоящее из единственного элемента x; такое множество будет обозначаться символом $\{x\}$. *Пустым* называется множество, не содержащее ни одного элемента, оно обозначается символом $\emptyset$. Если каждый элемент множества X принадлежит также и множеству Y, то X называется *подмножеством* множества Y, и это отношение выражается записью $X \subseteq Y$ или $Y \supseteq X$. Если $\mathfrak{X}$ — множество, элементами которого служат множества X, то множество всех x, таких, что $x \in X$ для некоторого $X \in \mathfrak{X}$, называется *объединением* множеств X из $\mathfrak{X}$; оно обозначается $\bigcup\limits_{X \in \mathfrak{X}} X$. *Пересечение* множеств X из $\mathfrak{X}$ определяется как множество всех x, принадлежащих каждому из множеств $X \in \mathfrak{X}$; оно обозначается $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{X}} X$. Два множества называются *непересекающимися*, если их пересечение пусто. Если последовательность $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ состоит из попарно непересекающихся множеств, то для обозначения их объединения будет также применяться символ $\sum\limits_{n-1}^{\infty} X_n$.

Отображения. Термины *отображение*, *функция* и *преобразование* употребляются в дальнейшем как синонимы. Символ $f\colon X \to Y$ означает, что f — однозначная функция, *областью определения* которой служит множество X, а *область значений* содержится в множестве Y; каждому элементу $x \in X$ функция f ставит в соответствие однозначно определенный элемент $f(x)=y\in Y$. Для двух отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$ мы можем определить их *композицию* $gf\colon X\to Z$ с помощью соотношения $(gf)(x)=g(f(x))$. Символ $f(M)$ обозначает множество $\{f(x);\ x\in M\}$, при этом $f(M)$ называется *образом* множества M при отображении f. Символ $f^{-1}(N)$ обозначает множество $\{x;\ f(x)\in N\}$, которое называется *прообразом* множества N при отображении f. Ясно, что

$$Y_1=f\left(f^{-1}(Y_1)\right)\quad \text{для всех}\quad Y_1\subseteq f(X);$$

$$X_1\subseteq f^{-1}(f(X_1))\quad \text{для всех}\quad X_1\subseteq X.$$

Если $f\colon X\to Y$ и для каждого $y\in f(X)$ существует только один элемент $x\in X$, такой, что $f(x)=y$, то говорят, что для f существует *обратное отображение* или что f является *взаимно однозначным отображением*. Обратное отображение имеет область определения $f(X)$ и область значений X; оно определяется соотношением $x=f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})$.

Область определения и область значений отображения f обозначаются соответственно $D(f)$ и $R(f)$. Таким образом, если f имеет обратное отображение, то

$$f^{-1}(f(x))=x\quad \text{для всех}\quad x\in D(f);$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y\quad \text{для всех}\quad y\in R(f).$$

Говорят, что функция f отображает множество X *на* множество Y, если $f(X)=Y$. Если же $f(X)\subseteq Y$, то говорят, что f отображает X *в* Y. Функция f называется *продолжением* функции g, а g — *сужением* f, если $D(f)$ содержит $D(g)$ и $f(x)=g(x)$ для всех x из $D(g)$.

Лемма Цорна

Определение. Пусть P — некоторое множество элементов a, b, ... Предположим, что для некоторых пар (a,b) элементов множества P определено бинарное отношение $a\prec b$, обладающее следующими свойствами:

$a\prec a$,

если $a\prec b$ и $b\prec a$, то $a=b$,

если $a\prec b$ и $b\prec c$, то $a\prec c$ (транзитивность).

Тогда говорят, что множество P *частично упорядочено* [1]) отношением $\prec$.

---

[1]) Иногда частично упорядоченным называют множество, удовлетворяющее только первому и третьему из указанных условий. — *Прим. перев.*

Примеры. Если P — множество всех подмножеств некоторого данного множества X, то отношение включения множеств ($A \subseteq B$) частично упорядочивает P. Множество всех комплексных чисел $z = x + iy$, $w = u + iv$, ... станет частично упорядоченным, если положить $z \prec w$ при $x \leqslant u$ и $y \leqslant v$.

Определение. Пусть P — некоторое частично упорядоченное множество элементов $a, b, \ldots$. Если $a \prec c$ и $b \prec c$, то c называется *мажорантой* элементов a и b. Если, кроме того, $c \prec d$ для всякой мажоранты d элементов a и b, то c называется *верхней гранью* этих элементов; в этом случае мы пишем $c = \sup(a, b)$ или $a \vee b$. Такой элемент множества P единствен, если он существует. Аналогичным образом определяются *миноранта* и *нижняя грань* элементов a и b; последняя обозначается $\inf(a, b)$ или $a \wedge b$. Если для каждой пары (a, b) элементов частично упорядоченного множества P существуют верхняя и нижняя грани $a \vee b$ и $a \wedge b$, то множество P называется *структурой*.

Пример. Совокупность всех подмножеств M некоторого фиксированного множества B становится структурой, если отношение частичного упорядочения $M_1 \prec M_2$ определить с помощью включения множеств $M_1 \subseteq M_2$.

Определение. Частично упорядоченное множество P называется *линейно упорядоченным*, если для всякой пары (a, b) элементов множества P выполняется одно из двух соотношений $a \prec b$ или $b \prec a$. Всякое подмножество частично упорядоченного множества частично упорядочено тем же отношением порядка; оно может оказаться линейно упорядоченным этим отношением. Если множество P частично упорядочено, а S — некоторое подмножество множества P, то элемент $m \in P$ называется мажорантой подмножества S, когда $s \prec m$ для всякого $s \in S$. Если некоторый элемент $m \in P$ обладает тем свойством, что из соотношений $p \in P$ и $m \prec p$ следует равенство $p = m$, то m называется *максимальным элементом*.

Лемма Цорна. Пусть P — непустое частично упорядоченное множество, такое, что всякое его линейно упорядоченное подмножество имеет в P мажоранту. Тогда P содержит по крайней мере один максимальный элемент.

Известно, что лемма Цорна эквивалентна аксиоме выбора (аксиоме Цермело) теории множеств.

2. Топологические пространства

Открытые и замкнутые множества

Определение. Система τ подмножеств множества X определяет в X *топологию*, если она содержит пустое множество, множество X, объединение множеств любой подсистемы системы τ и пересечение