Примеры. Если P — множество всех подмножеств некоторого данного множества X, то отношение включения множеств ($A \subseteq B$) частично упорядочивает P. Множество всех комплексных чисел $z = x + iy$, $w = u + iv$, ... станет частично упорядоченным, если положить $z \prec w$ при $x \leqslant u$ и $y \leqslant v$.

Определение. Пусть P — некоторое частично упорядоченное множество элементов $a, b, \ldots$. Если $a \prec c$ и $b \prec c$, то c называется *мажорантой* элементов a и b. Если, кроме того, $c \prec d$ для всякой мажоранты d элементов a и b, то c называется *верхней гранью* этих элементов; в этом случае мы пишем $c = \sup(a, b)$ или $a \vee b$. Такой элемент множества P единствен, если он существует. Аналогичным образом определяются *миноранта* и *нижняя грань* элементов a и b; последняя обозначается $\inf(a, b)$ или $a \wedge b$. Если для каждой пары (a, b) элементов частично упорядоченного множества P существуют верхняя и нижняя грани $a \vee b$ и $a \wedge b$, то множество P называется *структурой*.

Пример. Совокупность всех подмножеств M некоторого фиксированного множества B становится структурой, если отношение частичного упорядочения $M_1 \prec M_2$ определить с помощью включения множеств $M_1 \subseteq M_2$.

Определение. Частично упорядоченное множество P называется *линейно упорядоченным*, если для всякой пары (a, b) элементов множества P выполняется одно из двух соотношений $a \prec b$ или $b \prec a$. Всякое подмножество частично упорядоченного множества частично упорядочено тем же отношением порядка; оно может оказаться линейно упорядоченным этим отношением. Если множество P частично упорядочено, а S — некоторое подмножество множества P, то элемент $m \in P$ называется мажорантой подмножества S, когда $s \prec m$ для всякого $s \in S$. Если некоторый элемент $m \in P$ обладает тем свойством, что из соотношений $p \in P$ и $m \prec p$ следует равенство $p = m$, то m называется *максимальным элементом*.

Лемма Цорна. Пусть P — непустое частично упорядоченное множество, такое, что всякое его линейно упорядоченное подмножество имеет в P мажоранту. Тогда P содержит по крайней мере один максимальный элемент.

Известно, что лемма Цорна эквивалентна аксиоме выбора (аксиоме Цермело) теории множеств.

2. Топологические пространства

Открытые и замкнутые множества

Определение. Система τ подмножеств множества X определяет в X *топологию*, если она содержит пустое множество, множество X, объединение множеств любой подсистемы системы τ и пересечение любого конечного числа множеств из τ. Множества системы τ называются *открытыми множествами топологического пространства* $(X;\ \tau)$; мы часто будем опускать символ τ и говорить о топологическом пространстве X. В дальнейшем мы всегда, кроме тех случаев, когда это особо оговаривается, будем предполагать, что топологическое пространство X удовлетворяет следующей *аксиоме отделимости Хаусдорфа*.

Для каждой пары (x_1, x_2) различных точек x_1, x_2 пространства X существуют непересекающиеся открытые множества G_1, G_2, такие, что $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$.

Окрестностью точки x пространства X называется всякое множество, содержащее открытое множество, которому принадлежит x. Окрестность подмножества M пространства X определяется как множество, являющееся окрестностью для каждой точки множества M. Точка x пространства X называется *точкой накопления*, или *предельной точкой*, некоторого подмножества M пространства X, если всякая ее окрестность содержит по крайней мере одну точку $m \in M$, отличную от x.

Определение. Всякое подмножество M топологического пространства X можно рассматривать как топологическое пространство, если за открытые подмножества множества M принять пересечения вида $M \cap G$, где G — открытые множества пространства X. Введенная таким способом топология называется *относительной топологией* M как подмножества топологического пространства X.

Определение. Множество M топологического пространства X называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Легко видеть, что M замкнуто в том и только том случае, когда множество $M^C = X - M$, называемое *дополнением* множества M, является открытым. Выражение вида $A - B$ обозначает здесь и далее совокупность всех точек $x \in A$, не принадлежащих множеству B. Если $M \subseteq X$ — некоторое подмножество пространства X, то пересечение всех замкнутых подмножеств из X, содержащих M, называется *замыканием* множества M; мы будем обозначать его M^a (верхний индекс „a“ — первая буква немецкого термина „abgeschlossen“ — замкнутый).

Множество M^a, очевидно, замкнуто и $M \subseteq M^a$; нетрудно видеть, что $M = M^a$ тогда и только тогда, когда множество M замкнуто

Метрические пространства

Определение. Пусть X и Y — некоторые множества. Символом $X \times Y$ мы обозначим множество всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Мы будем называть его *произведением* множеств X и Y. Множество X называется *метрическим пространством*, если в области $X \times X$ определена функция d, множество значений которой принадлежит полю R^1 вещественных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$d(x_1, x_2) \geqslant 0$; $d(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;

$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$;

$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (неравенство треугольника).

Функция d называется *расстоянием* или *метрикой* пространства X. Каждой точке x_0 метрического пространства X и всякому положительному числу r мы сопоставим множество

$$S(x_0; r) = \{x \in X;\ d(x, x_0) < r\},$$

которое называется *открытым шаром* радиуса r с центром в точке x_0. Множество M метрического пространства X мы назовем „открытым", если вместе со всякой точкой $x_0 \in M$ оно содержит также и некоторый шар с центром в точке x_0. Совокупность всех таких „открытых" множеств удовлетворяет аксиоме открытых множеств, сформулированной в определении топологического пространства.

Таким образом, метрическое пространство X является топологическим. Нетрудно заметить, что точка x_0 метрического пространства X является предельной точкой некоторого множества M в том и только том случае, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует по крайней мере одна точка $m \neq x_0$ множества M, такая, что $d(m, x_0) < \varepsilon$. Евклидово n-мерное пространство R^n становится метрическим, если положить

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}, \quad \text{где } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Непрерывные отображения

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторое отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Отображение f называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если любой окрестности U точки $f(x_0)$ соответствует некоторая окрестность V точки x_0, такая, что $f(V) \subseteq U$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке своей области определения $D(f) = X$.

Теорема. Пусть X, Y — топологические пространства и $f\colon X \to Y$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз при этом отображении всякого открытого множества из Y представляет собой открытое множество из X.

Доказательство. Если отображение f непрерывно и U — открытое множество из Y, то множество $V = f^{-1}(U)$ представляет собой окрестность всякой точки $x_0 \in X$, удовлетворяющей условию $f(x_0) \in U$, т. е. является окрестностью всякой входящей в него точки и, следовательно, открытым множеством. Обратно, если для всякого открытого множества $U \ni f(x_0)$ пространства Y соответствующее множество $V = f^{-1}(U)$ пространства X открыто, то отображение f по определению непрерывно в точке $x_0 \in X$.

Бикомпактность

Определение. Говорят, что система множеств G_α, $\alpha \in A$, *покрывает* множество X, если X содержится как подмножество в объединении $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$. Подмножество M топологического пространства X называется *бикомпактным* [1]), если всякая система открытых множеств пространства X, покрывающая M, содержит конечную подсистему, которая также покрывает множество M.

Из приведенной выше теоремы следует, что *непрерывный образ бикомпактного множества бикомпактен.*

Предложение 1. Бикомпактные подмножества топологического пространства замкнуты.

Доказательство. Предположим, что бикомпактное множество M топологического пространства X имеет предельную точку x_0, не принадлежащую M. По аксиоме отделимости Хаусдорфа для всякой точки $m \in M$ существуют непересекающиеся открытые множества $G_{m,\, x_0}$ и $G_{x_0,\, m}$ пространства X, такие, что $m \in G_{m,\, x_0}$, $x_0 \in G_{x_0,\, m}$. Система множеств $\{G_{m,\, x_0};\ m \in M\}$ очевидно покрывает M. В силу бикомпактности множества M существует конечная подсистема $\{G_{m_i,\, x_0};\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, покрывающая M. Тогда множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_{x_0,\, m_i}$ не пересекается с M. Но поскольку x_0 — предельная точка множества M, открытое множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_{x_0,\, m_i} \ni x_0$ должно содержать некоторую точку $m \in M$, отличную от x_0. Таким образом, мы приходим к противоречию, и поэтому множество M должно быть замкнутым.

Предложение 2. Замкнутое подмножество M_1 бикомпактного множества M топологического пространства X бикомпактно.

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}$ — произвольная система открытых множеств пространства X, покрывающая M_1. Так как множество M_1 замкнуто, то $M_1^C = X - M_1$ есть открытое множество пространства X. Поскольку $M_1 \subseteq M$, система открытых множеств, состоящая из всех множеств $\{G_\alpha\}$ и множества M_1^C, покрывает M. Множество M биком-

[1]) Автор применяет здесь термин compact — компактный; в русской математической литературе такие множества часто называют бикомпактными. — *Прим. перев.*

пактно, поэтому система, состоящая из M_1^C и выбранных подходящим образом множеств $\{G_{\alpha_i};\ i=1, 2, \ldots, n\}$, покрывает M. Таким образом, система $\{G_{\alpha_i};\ i=1, 2, \ldots, n\}$ покрывает M_1, и поэтому M_1 — бикомпактное множество.

Определение. Подмножество топологического пространства называется *относительно бикомпактным*, если его замыкание бикомпактно. Топологическое пространство называется *локально бикомпактным*, если каждая точка этого пространства имеет бикомпактную окрестность.

Теорема. Всякое локально бикомпактное пространство X может быть вложено в бикомпактное пространство Y, отличающееся от X одним дополнительным элементом, причем это вложение можно осуществить так, чтобы относительная топология пространства X как подмножества пространства Y совпадала с исходной топологией в X. Такое пространство Y называется *одноточечным бикомпактным расширением пространства* X.

Доказательство. Пусть y — некоторый элемент, отличный от точек пространства X. Обозначим через $\{U\}$ класс всех открытых множеств пространства X, для которых множества $U^C = X - U$ бикомпактны. Заметим, что само пространство X принадлежит классу $\{U\}$. Пусть Y — множество, состоящее из всех точек пространства X и элемента y. Открытыми множествами пространства Y мы назовем множества, которые либо не содержат y и представляют собой открытые подмножества пространства X, либо содержат элемент y, и их пересечения с множеством X входят в класс $\{U\}$. Нетрудно заметить, что при этом множество Y становится топологическим пространством и относительная топология в X совпадает с первоначальной топологией.

Пусть теперь $\{V\}$ — некоторое семейство открытых множеств, покрывающее Y. Тогда среди множеств семейства $\{V\}$ имеется некоторое множество вида $U_0 \cup \{y\}$, где $U_0 \in \{U\}$. Согласно определению класса $\{U\}$, множество U_0^C бикомпактно как подмножество пространства X. Это множество покрывается системой множеств вида $V \cap X$, где $V \in \{V\}$. Поэтому некоторая конечная подсистема $V_1 \cap X$, $V_2 \cap X, \ldots, V_n \cap X$ покрывает U_0^C. Следовательно, система, состоящая из множеств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и множества $U_0 \cup \{y\}$, покрывает Y, т. е. пространство Y бикомпактно.

Теорема Тихонова

Определение. Пусть каждому элементу α из некоторого множества индексов A поставлено в соответствие некоторое топологическое пространство X_α. *Произведение* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ множеств X_α определяется как множество всех функций f, заданных в области A, таких, что

$f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Мы будем писать $f = \prod_{\alpha \in A} f(\alpha)$ и называть $f(\alpha)$ α-координатой функции f. В случае когда A — множество целых чисел $(1, 2, \ldots, n)$, произведение $\prod_{k=1}^{n} X_k$ обычно записывают в виде $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Определим теперь „открытые" множества произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ как всевозможные множества вида $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α — открытые множества пространств X_α, совпадающие с X_α для всех, кроме конечного числа, значений α. Тем самым в произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ вводится топология, называемая *тихоновской*. Пространство $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, топологизированное таким способом, называется *тихоновским произведением*.

Теорема Тихонова. Произведение $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ системы бикомпактных топологических пространств X_α бикомпактно.

Замечание. Известно, что всякое замкнутое ограниченное множество точек вещественной числовой прямой R^1 бикомпактно по отношению к топологии, которая определяется функцией расстояния $d(x, y) = |x - y|$ (теорема Больцано — Вейерштрасса). Отметим кстати, что в общем случае подмножество M метрического пространства называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре $S(x_0, r)$ этого пространства. Из теоремы Тихонова, в частности, следует, что множество

$$-\infty < a_i \leqslant x_i \leqslant b_i < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(параллелепипед), лежащее в n-мерном евклидовом пространстве R^n, бикомпактно. Отсюда видно, что пространство R^n локально бикомпактно.

Доказательство теоремы Тихонова. Система множеств называется *центрированной*, если пересечение множеств любой ее конечной подсистемы непусто. Рассматривая дополнения открытых множеств, образующих покрытие пространства X, нетрудно заметить, что топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда для любой центрированной системы $\{M_\alpha;\ \alpha \in A\}$ подмножеств этого пространства пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha^a$ непусто.

Пусть теперь $\{S\}$ — некоторая центрированная система подмножеств S пространства $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Рассмотрим систему $\{N\}$ подмножеств N пространства X, обладающую следующими свойствами:

(1) система $\{S\}$ содержится в системе $\{N\}$ как подсистема;

(2) система $\{N\}$ центрированная;

(3) система $\{N\}$ максимальна в том смысле, что она не является собственной подсистемой никакой другой центрированной системы, содержащей систему $\{S\}$ в качестве подсистемы.

Существование такой максимальной системы $\{N\}$ можно доказать с помощью леммы Цорна или принципа трансфинитной индукции.

Для каждого множества N системы $\{N\}$ определим множество $N_\alpha = \{f(\alpha);\ f \in N\} \subseteq X_\alpha$. Через $\{N_\alpha\}$ мы обозначим систему $\{N_\alpha;\ N \in \{N\}\}$. Система $\{N_\alpha\}$, как и $\{N\}$, является центрированной. Поскольку множество X_α бикомпактно, существует по крайней мере одна точка $p_\alpha \in X_\alpha$, такая, что $p_\alpha \in \bigcap\limits_{N \in \{N\}} N_\alpha^a$. Мы должны теперь показать, что точка $p = \prod\limits_{\alpha \in A} p_\alpha$ принадлежит множеству $\bigcap\limits_{N \in \{N\}} N^a$.

Поскольку точка вида p_{α_0} принадлежит пересечению $\bigcap\limits_{N \in \{N\}} N_{\alpha_0}^a$, всякое открытое множество G_{α_0} пространства X_{α_0}, содержащее p_{α_0}, пересекается с каждым множеством $N_{\alpha_0} \in \{N_{\alpha_0}\}$. Поэтому открытое множество

$$G^{(\alpha_0)} = \left\{x;\ x = \prod_{\alpha \in A} x_\alpha,\ \text{где}\ x_{\alpha_0} \in G_{\alpha_0}\right\}$$

пространства X должно пересекаться с каждым множеством N системы $\{N\}$. Согласно свойству (3) максимальности системы $\{N\}$, множество $G^{(\alpha_0)}$ должно принадлежать $\{N\}$. Поэтому пересечение любого конечного числа множеств типа $G^{(\alpha_0)}$ при $\alpha_0 \in A$ также должно принадлежать системе $\{N\}$ и, следовательно, такое множество пересекается с каждым множеством $N \in \{N\}$. Всякое открытое множество пространства X, содержащее точку p, по определению содержит некоторое пересечение указанного выше типа; отсюда мы заключаем, что точка $p = \prod\limits_{\alpha \in A} p_\alpha$ должна принадлежать пересечению $\bigcap\limits_{N \in \{N\}} N^a$.

Теорема Урысона

Предложение. Бикомпактное пространство X является ***нормальным***, т. е. для любых непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 из X существуют такие непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2, что $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$.

Доказательство. Для всякой пары элементов (x, y), таких, что $x \in F_1$, $y \in F_2$, существуют такие непересекающиеся открытые множества $G(x, y)$ и $G(y, x)$, что $x \in G(x, y)$, $y \in G(y, x)$. Множество F_2 как замкнутое подмножество бикомпактного пространства X бикомпактно, поэтому, выбрав произвольный фиксированный элемент x, мы можем покрыть F_2 конечным числом открытых множеств вида

$G(y_1, x), G(y_2, x), \ldots, G(y_{n(x)}, x)$. Положим

$$G_x = \bigcup_{j=1}^{n(x)} G(y_j, x) \quad \text{и} \quad G(x) = \bigcap_{j=1}^{n(x)} G(x, y_j).$$

Тогда для этих непересекающихся открытых множеств G_x и $G(x)$ справедливы соотношения $F_2 \subseteq G_x$, $x \in G(x)$. Множество F_1 также бикомпактно и поэтому может быть покрыто конечным числом открытых множеств $G(x_1), G(x_2), \ldots, G(x_k)$. Тогда, как нетрудно видеть, множества

$$G_1 = \bigcup_{j=1}^{k} G(x_j) \quad \text{и} \quad G_2 = \bigcap_{j=1}^{k} G_{x_j}$$

удовлетворяют условиям нашего предложения.

Следствие. Бикомпактное пространство X является *регулярным*, т. е. для всякого непустого открытого множества G_1' из X существует непустое открытое множество G_2', такое, что $(G_2')^a \subseteq G_1'$.

Доказательство. Положим $F_1 = (G_1')^C$ и $F_2 = \{x\}$, где $x \in G_1'$. За множество G_2' можно теперь принять множество G_2, построенное при доказательстве предыдущего предложения.

Теорема Урысона. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества нормального пространства X. Тогда существует такая вещественная непрерывная функция $f(t)$, заданная на множестве X, что

$$0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \text{ на } X, \quad f(t) = 0 \text{ на } A, \quad f(t) = 1 \text{ на } B.$$

Доказательство. Сначала убедимся в том, что каждому рациональному числу вида $r = k/2^n$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^n$) можно поставить в соответствие некоторое открытое множество $G(r)$ таким образом, что (1) $A \subseteq G(0)$, $B = G(1)^C$ и (2) $G(r)^a \subseteq G(r')$ при любых значениях $r < r'$. Это доказывается с помощью индукции по n. Так как пространство X нормально, то при $n = 0$ существуют непересекающиеся открытые множества G_0 и G_1, такие, что $A \subseteq G_0$, $B \subseteq G_1$, и остается лишь положить $G_0 = G(0)$. Допустим теперь, что множества $G(r)$ построены для чисел r вида $k/2^{n-1}$ и условия (2) при этом выполняются. Возьмем некоторое целое нечетное значение $k > 0$. В этом случае $G((k-1)/2^n)^a \subseteq G((k+1)/2^n)$, так как числа $(k-1)/2^n$ и $(k+1)/2^n$ имеют вид $k'/2^{n-1}$, где $0 \leqslant k' \leqslant 2^{n-1}$. Следовательно, поскольку X — нормальное пространство, существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям $G((k-1)/2^n)^a \subseteq G$, $G^a \subseteq G((k+1)/2^n)$. Полагая $G(k/2^n) = G$, мы завершаем доказательство по индукции.

Определим теперь функцию $f(t)$ соотношениями

$$f(t)=0 \quad \text{на множестве } G(0),$$
$$f(t)=\sup_{t \notin G(r)} r \quad \text{для всякой точки } t \in G(0)^C.$$

Тогда по условию (1) $f(t)=0$ на множестве A и $f(t)=1$ на множестве B. Остается убедиться в непрерывности функции f. Для всякого $t_0 \in X$ и любого положительного целого числа n выберем такое значение r, чтобы выполнялось условие $f(t_0)<r<f(t_0)+2^{-n-1}$. Положим $G=G(r) \cap G\left(r-2^{-n}\right)^{aC}$ (при этом мы условимся, что $G(s) \neq \emptyset$, если $s<0$, и $G(s)=X$, если $s>1$). Открытое множество G содержит точку t_0, так как из неравенства $f(t_0)<r$ следует, что $t_0 \in G(r)$, а из соотношения $(r-2^{-n-1})<f(t_0)$ вытекает, что $t_0 \in G(r-2^{-n-1})^C \subseteq G\left(r-2^{-n}\right)^{aC}$. Далее, если $t \in G$, то $t \in G(r)$, и поэтому $f(t) \leqslant r$; кроме того, $t \in G\left(r-2^{-n}\right)^{aC} \subseteq G\left(r-2^{-n}\right)^C$ и, следовательно, $r-2^{-n} \leqslant f(t)$. Таким образом, мы показали, что для точек $t \in G$ выполняется неравенство $|f(t)-f(t_0)| \leqslant 1/2^n$, откуда и следует непрерывность функции f.

Теорема Стоуна — Вейерштрасса

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами. Пусть $f(x)$ — вещественная или комплексная непрерывная функция, заданная на замкнутом интервале $[0,\ 1]$. Тогда существует последовательность многочленов $P_n(x)$, которая при $n \to \infty$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[0,\ 1]$. Следуя С. Бернштейну, можно положить

$$P_n(x)=\sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) x^p(1-x)^{n-p}. \tag{1}$$

Доказательство. Дифференцируя тождество

$$(x+y)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p y^{n-p}$$

по переменной x и умножая на x, мы получаем соотношение

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n} pC_n^p x^p y^{n-p}.$$

Аналогично, дифференцируя указанное тождество по x дважды и умножая на x^2, получаем формулу

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n} p(p-1)C_n^p x^p y^{n-p}.$$

Полагая

$$r_p(x) = C_n^p x^p (1-x)^{n-p}, \tag{2}$$

мы выводим соотношения

$$\sum_{p=0}^{n} r_p(x) = 1, \quad \sum_{p=0}^{n} p r_p(x) = nx, \quad \sum_{p=0}^{n} p(p-1) r_p(x) = n(n-1)x^2. \tag{3}$$

Следовательно,

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) = n^2x^2 \sum_{p=0}^{n} r_p(x) - 2nx \sum_{p=0}^{n} p r_p(x) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n} p^2 r_p(x) = n^2x^2 - 2nx \cdot nx + (nx + n(n-1)x^2) = nx(1-x). \tag{4}$$

Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то $|f(x)| \leqslant M < \infty$ на отрезке $[0,1]$. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad |x - x'| < \delta. \tag{5}$$

Из формулы (3) мы заключаем, что

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} f(p/n) r_p(x) \right| = \left| \sum_{p=0}^{n} (f(x) - f(p/n)) r_p(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{|p-nx| \leqslant \delta n} \right| + \left| \sum_{|p-nx| > \delta n} \right|.$$

Для первого слагаемого в правой части последнего неравенства мы, учитывая формулы (3) и неравенство $r_p(x) \geqslant 0$, выводим оценку

$$\left| \sum_{|p-nx| \leqslant \delta n} \right| \leqslant \varepsilon \sum_{p=0}^{n} r_p(x) = \varepsilon.$$

Для второго слагаемого из формулы (4) и условия $|f(x)| \leqslant M$ вытекает неравенство

$$\left| \sum_{|p-nx| > \delta n} \right| \leqslant 2M \sum_{|p-nx| > \delta n} r_p(x) \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) =$$

$$= \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{M}{2\delta^2 n} \to 0 \ (\text{при} \ n \to \infty).$$

Из приведенных оценок и следует утверждение теоремы.

Теорема Стоуна — Вейерштрасса. Пусть X — бикомпактное пространство и $C(X)$ — множество всех вещественных непрерывных функций, определенных на X. Через B обозначим подмножество множества $C(X)$, удовлетворяющее следующим трем условиям: (1) если $f, g \in B$, то произведение $f \cdot g$ и линейные комбинации

$\alpha f + \beta g$ с вещественными коэффициентами α, β также принадлежат B, (2) постоянная функция 1 принадлежит B и (3) предел f_∞ всякой равномерно сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций, принадлежащих подмножеству B, также принадлежит B. Тогда $B = C(X)$ в том и только в том случае, когда для любой пары (s_1, s_2) различных точек пространства X существует функция x из множества B, удовлетворяющая условию $x(s_1) \neq x(s_2)$ (в этом случае говорят, что множество B *разделяет точки* пространства X).

Доказательство. Необходимость указанного условия следует из того, что бикомпактное пространство нормально, и поэтому по теореме Урысона существует такая непрерывная вещественная функция x, что $x(s_1) \neq x(s_2)$.

Для доказательства достаточности удобно ввести обозначения, принятые в теории структур:

$$(f \vee g)(s) = \max(f(s), g(s)), \quad (f \wedge g)(s) = \min(f(s), g(s)),$$

$$|f|(s) = |f(s)|.$$

Согласно предыдущей теореме, существует последовательность полиномов $\{P_n\}$, такая, что

$$||t| - P_n(t)| < \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad -n \leqslant t \leqslant n.$$

Следовательно, $||f(s)| - P_n(f(s))| < 1/n$, если $-n \leqslant f(s) \leqslant n$. Отсюда, согласно условию (3), следует, что $|f| \in B$, если $f \in B$, так как всякая функция $f(s) \in B \subseteq C(X)$ ограничена на бикомпактном пространстве X. Поэтому, учитывая соотношения

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{и} \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

мы заключаем, что множество B замкнуто по отношению к структурным операциям $\vee$ и $\wedge$.

Пусть элемент $h \in C(X)$ и точки $s_1, s_2 \in X$ выбраны произвольно, но так, что $s_1 \neq s_2$. Тогда мы можем найти функцию $f_{s_1 s_2} \in B$, такую, что $f_{s_1 s_2}(s_1) = h(s_1)$ и $f_{s_1 s_2}(s_2) = h(s_2)$. В самом деле, выберем функцию $g \in B$ так, что $g(s_1) \neq g(s_2)$, и возьмем такие вещественные числа α и β, что функция $f_{s_1 s_2} = \alpha g + \beta$ удовлетворяет условиям

$$f_{s_1 s_2}(s_1) = h(s_1) \quad \text{и} \quad f_{s_1 s_2}(s_2) = h(s_2).$$

Пусть теперь заданы произвольное $\varepsilon > 0$ и точка $t \in X$. Тогда для всякой точки $s \in X$ существует окрестность $U(s)$, такая, что $f_{st}(u) > h(u) - \varepsilon$ для всех $u \in U(s)$. Пусть далее множества $U(s_1)$, $U(s_2)$, ..., $U(s_n)$ покрывают бикомпактное пространство X; положим

$$f_t = f_{s_1 t} \vee \dots \vee f_{s_n t}.$$

Тогда $f_t \in B$ и $f_t(u) > h(u) - \varepsilon$ для всех точек $u \in X$. Кроме того, $f_t(t) = h(t)$, так как $f_{s_j t}(t) = h(t)$. Следовательно, существует такая окрестность $V(t)$ точки t, что $f_t(u) < h(u) + \varepsilon$ при всех $u \in V(t)$. Пусть множества $V(t_1)$, $V(t_2)$, ..., $V(t_k)$ покрывают бикомпактное пространство X. Определим функцию f соотношением

$$f = f_{t_1} \wedge \cdots \wedge f_{t_k}.$$

Тогда $f \in B$ и $f(u) > h(u) - \varepsilon$ для всех точек $u \in X$, ибо $f_{t_j}(u) > h(u) - \varepsilon$ для $u \in X$. Кроме того, для любой точки $u \in X$ и, в частности, для $u \in V(t_i)$ справедливы неравенства $f(u) \leqslant f_{t_i}(u) < h(u) + \varepsilon$.

Таким образом мы показали, что $|f(u) - h(u)| < \varepsilon$ на множестве X, откуда и следует наше утверждение.

Попутно мы доказали два следствия.

Следствие 1 (Какутани — Крейн). Пусть X — бикомпактное пространство и $C(X)$ — совокупность всех вещественных непрерывных функций, заданных на X. Обозначим через B подмножество множества $C(X)$, удовлетворяющее следующим условиям: (1) если f, $g \in B$, то $f \vee g$, $f \wedge g$ и линейные комбинации $\alpha f + \beta g$ с вещественными коэффициентами α, β принадлежат B; (2) постоянная функция 1 принадлежит B; (3) предел f_∞ всякой равномерно сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций из множества B также принадлежит B. Тогда $B = C(X)$ в том и только в том случае, когда множество B разделяет точки пространства X.

Следствие 2. Пусть X — бикомпактное пространство и $C(X)$ — множество всех комплексных непрерывных функций, определенных на X. Пусть подмножество B множества $C(X)$ удовлетворяет следующим условиям: (1) если f, $g \in B$, то произведение $f \cdot g$ и линейные комбинации $\alpha f + \beta g$ с комплексными коэффициентами α, β принадлежат B, (2) постоянная функция 1 принадлежит B, (3) предел f_∞ всякой равномерно сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций, принадлежащих множеству B, также принадлежит B. Тогда $B = C(X)$ в том и только в том случае, когда множество B удовлетворяет следующим условиям: (4) B разделяет точки пространства X; (5) если $f(s) \in B$, то комплексно сопряженная функция $\overline{f}(s)$ также принадлежит B.

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Пусть X — окружность единичного круга пространства R^2. Множество X представляет собой бикомпактное пространство по отношению к обычной топологии, и всякая комплексная непрерывная функция, заданная на X, может быть представлена некоторой заданной в области $-\infty < x < \infty$ непрерывной функцией $f(x)$, имеющей по x период 2π. Если за множество B, о котором говорится в следствии 2, принять совокупность всех тех функций, заданных на пространстве X, которые являются линейными комбинациями с комплексными коэффициентами тригонометрических функций

$$e^{inx} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а также тех функций, которые являются пределами равномерно сходящихся последовательностей таких линейных комбинаций, то мы получим *теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами*: Всякая непрерывная комплексная функция $f(x)$ периода 2π может быть равномерно аппроксимирована *тригонометрическими полиномами* вида $\sum_n c_n e^{inx}$.

Полные пространства

По определению последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X сходится к пределу $x \in X$, если $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$. Из неравенства треугольника $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x)$ мы заключаем, что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ из пространства X удовлетворяет *условию Коши*

$$\lim_{n, m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0. \tag{1}$$

Определение. Всякая последовательность элементов метрического пространства X, удовлетворяющая условию (1), называется *фундаментальной последовательностью*. Метрическое пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность этого пространства сходится к пределу, являющемуся точкой пространства X.

Нетрудно заметить, что, согласно неравенству треугольника, предел последовательности $\{x_n\}$, если он существует, является единственным.

Определение. Подмножество M топологического пространства X называется *неплотным* в X, если его замыкание M^a не содержит никаких непустых открытых множеств пространства X. Множество M называется *плотным в $X*, если $M^a = X$ [1]). Говорят, что M является *множеством первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения множеств, каждое из которых неплотно в X; в противном случае M называется множеством второй категории.

[1]) Аналогично определяются множества, плотные или неплотные в произвольном подмножестве $B \subseteq X$. Множества, плотные или неплотные во всем пространстве X, называются также соответственно *всюду плотными* и *нигде не плотными*. — *Прим. перев.*

Теорема Бэра о категориях

Теорема Бэра — Хаусдорфа. Всякое непустое полное метрическое пространство является множеством второй категории.

Доказательство. Пусть $\{M_n\}$ — последовательность замкнутых множеств, объединение которых образует полное метрическое пространство X. Предположив, что ни одно из множеств M_n не содержит непустых открытых подмножеств, мы придем к противоречию. В самом деле, в этом случае множество M_1^C — открытое и $M_1^{Ca} = X$; следовательно, M_1^C содержит замкнутый шар $S_1 = \{x;\ d(x_1,\ x) \leqslant r_1\}$, центр которого x_1 может быть выбран сколь угодно близким к любой точке пространства X. При этом мы можем считать, что $0 < r_1 < 1/2$. Те же рассуждения показывают, что открытое множество M_2^C содержит замкнутый шар $S_2 = \{x;\ d(x_2,\ x) \leqslant r_2\}$, принадлежащий S_1 и такой, что $0 < r_2 < 1/2^2$. Повторяя эти рассуждения, мы получим последовательность $\{S_n\}$ замкнутых шаров $S_n = \{x;\ d(x_n,\ x) \leqslant r_n\}$, обладающих следующими свойствами:

$$0 < r_n < \frac{1}{2^n}, \qquad S_{n+1} \subseteq S_n, \qquad S_n \cap M_n = \emptyset \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Последовательность $\{x_n\}$ центров этих шаров является фундаментальной, так как $x_m \in S_n$ для любых значений $n < m$, и поэтому $d(x_n,\ x_m) \leqslant r_n < 1/2^n$. Пусть точка x_∞ — предел последовательности $\{x_n\}$. Ее существование гарантируется условием полноты пространства X. Из соотношений $d(x_n,\ x_\infty) \leqslant d(x_n,\ x_m) + d(x_m,\ x_\infty) \leqslant \leqslant r_n + d(x_m,\ x_\infty) \to r_n$ (при $m \to \infty$) мы заключаем, что $x_\infty \in S_n$ при всех значениях n. Следовательно, точка x_∞ не принадлежит ни одному из множеств M_n и поэтому не содержится в объединении $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = X$, что противоречит условию $x_\infty \in X$.

Теорема Бэра 1. Пусть M — множество первой категории в бикомпактном топологическом пространстве X. Тогда дополнение $M^C = X - M$ плотно в X.

Доказательство. Мы должны показать, что M^C пересекается со всяким непустым открытым множеством G пространства X. Множество M можно представить в виде $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n — неплотные замкнутые множества. Поскольку множество $M_1 = M_1^a$ неплотно, открытое множество M_1^C пересекается с G. Пространство X, будучи бикомпактным, регулярно, следовательно, существует непустое открытое множество G_1, такое, что $G_1^a \subseteq G \cap M_1^C$. Таким же способом мы можем выбрать непустое открытое множество G_2, удовлетворяющее условию $G_2^a \subseteq G_1 \cap M_2^C$. Повторяя это построение, мы получим последовательность непустых открытых множеств $\{G_n\}$, для которых выполняются соотношения

$$G_{n+1}^a \subseteq G_n \cap M_{n+1}^C \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность замкнутых множеств $\{G_n^a\}$ монотонна[1]) по n и поэтому центрирована. Ввиду бикомпактности пространства X существует точка $x \in X$, такая, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^a$. Из условия $x \in G_1^a$ следует, что $x \in G$, а из соотношений $x \in G_{n+1}^a \subseteq G_n \cap M_{n+1}^C$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $G_0 = G$) мы заключаем, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^C = M^C$. Итак, мы показали, что множество $G \cap M^C$ непусто.

Теорема Бэра 2. Пусть $\{x_n(t)\}$ — последовательность вещественных непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве X. Предположим, что в каждой точке t пространства X существует конечный предел этой последовательности:

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t).$$

Тогда совокупность всех точек разрыва функции x образует множество первой категории.

Доказательство. Для любого множества M пространства X обозначим через M^i объединение всех открытых множеств, содержащихся в M. Множество M^i называется *внутренностью*[2]) множества M.

Положим $P_m(\varepsilon) = \{t \in X;\ |x(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, $G(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m^i(\varepsilon)$. Нетрудно убедиться в том, что множество $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$ совпадает с множеством точек непрерывности функции $x(t)$. В самом деле, допустим, что функция $x(t)$ непрерывна в некоторой точке $t = t_0$. Покажем, что $t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. Поскольку $\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$, существует такой номер m, что $|x(t_0) - x_m(t_0)| \leqslant \varepsilon/3$. В силу непрерывности функций $x(t)$ и $x_m(t)$ в точке $t = t_0$, существует открытое множество $U_{t_0} \ni t_0$, такое, что $|x(t) - x(t_0)| \leqslant \varepsilon/3$, $|x_m(t) - x_m(t_0)| \leqslant \varepsilon/3$ при любых $t \in U_{t_0}$. Поэтому для $t \in U_{t_0}$ выполняется неравенство

$$|x(t) - x_m(t)| \leqslant |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0) - x_m(t_0)| + |x_m(t_0) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon.$$

---

[1]) Последовательность $\{M_i\}$ множеств M_i ($i = 1, 2, \ldots$) называется монотонной, если $M_i \subseteq M_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots$) или $M_i \supseteq M_{i+1}$ ($i = 1, 2 \ldots$). — *Прим. перев.*

[2]) Множество M^i называют также *открытым ядром* множества M. — *Прим. перев.*

Отсюда следует, что $t_0 \in P_m^i(\varepsilon)$, и поэтому $t_0 \in G(\varepsilon)$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$.

Обратно, пусть $t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем $t_0 \in G(\varepsilon/3)$, и, значит, существует m, при котором $t_0 \in P_m^i(\varepsilon/3)$. Следовательно, найдется открытое множество $U_{t_0} \ni t_0$, такое, что для всех точек $t \in U_{t_0}$ выполняется неравенство $|x(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon/3$. Отсюда, учитывая, что функция $x_m(t)$ непрерывна, а $\varepsilon > 0$ произвольно, мы заключаем, что функция $x(t)$ непрерывна в точке $t = t_0$.

Теперь после этих предварительных рассуждений введем множество

$$F_m(\varepsilon) = \{t \in X;\ |x_m(t) - x_{m+k}(t)| \leqslant \varepsilon\ (k = 1, 2, \ldots)\}.$$

Оно замкнуто, так как все функции $x_n(t)$ непрерывны. Кроме того, $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon)$, так как $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. По той же причине $F_m(\varepsilon) \subseteq P_m(\varepsilon)$. Следовательно, $F_m^i(\varepsilon) \subseteq P_m^i(\varepsilon)$, и поэтому $\bigcup_{m=1}^{\infty} F^i{}_m(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$. С другой стороны, для любого замкнутого множества F множество $(F - F^i)$ замкнуто и неплотно. Значит, $X - \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^i(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(F_m(\varepsilon) - F_m^i(\varepsilon)\right)$ — множество первой категории. Поэтому его подмножество $G(\varepsilon)^C = X - G(\varepsilon)$ также является множеством первой категории. Отсюда следует, что множество всех точек разрыва функции $x(t)$, которое можно выразить в виде $X - \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(1/n)^C$, представляет собой множество первой категории.

Теорема. Подмножество M полного метрического пространства X относительно бикомпактно тогда и только тогда, когда оно *вполне ограничено*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная система точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ множества M, такая, что всякая точка этого множества удалена не более чем на ε по крайней мере от одной из точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Другими словами, множество M вполне ограничено, если для каждого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной системой шаров радиуса $< \varepsilon$, центры которых принадлежат M.

Доказательство. Предположим, что множество M не является вполне ограниченным. В таком случае существуют положительное число ε и бесконечная последовательность $\{m_n\}$ точек множества M, такие, что $d(m_i, m_j) \geqslant \varepsilon$ для всех $i \neq j$. Поэтому если покрыть бикомпактное множество M^a системой открытых шаров, радиусы которых меньше ε, то никакая ее конечная подсистема не может покрывать множество M^a, ибо такая подсистема не может покрывать его бесконечное подмножество $\{m_i\} \subseteq M \subseteq M^a$. Значит, всякое относительно бикомпактное подмножество пространства X должно быть вполне ограниченным.

Обратно, пусть M — вполне ограниченное подмножество полного метрического пространства X. Тогда его замыкание M^a полно и вполне ограничено. Мы должны показать, что M^a бикомпактно. С этой целью мы сначала убедимся в том, что всякая бесконечная последовательность точек $\{p_n\}$ множества M^a содержит подпоследовательность $\{p_{(n)'}\}$, сходящуюся к некоторой точке множества M^a. Множество M вполне ограничено, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют точка $q_\varepsilon \in M^a$ и подпоследовательность $\{p_{n'}\}$ последовательности $\{p_n\}$, такие, что $d(p_{n'}, q_\varepsilon) < \varepsilon/2$ для всех выбранных значений n'. Поэтому $d(p_{n'}, p_{m'}) \leqslant d(p_{n'}, q_\varepsilon) + d(q_\varepsilon, p_{m'}) < \varepsilon$ при всех n', m'. Положим $\varepsilon = 1$ и построим соответствующую последовательность $\{p_{i'}\}$, а затем для $\varepsilon = 1/2$ применим предыдущие рассуждения к последовательности $\{p_{i'}\}$. В результате мы получим такую подпоследовательность $\{p_{n''}\}$ последовательности $\{p_{n'}\}$, что для всех выбранных значений индексов

$$d(p_{n'}, p_{m'}) < 1, \quad d(p_{n''}, p_{m''}) < \frac{1}{2}.$$

Повторяя это построение, мы получим подпоследовательность $\{p_{n^{(k+1)}}\}$ последовательности $\{p_{n^{(k)}}\}$, причем для всех выбранных значений индексов

$$d(p_{n^{(k+1)}}, p_{m^{(k+1)}}) < \frac{1}{2^k}.$$

Теперь подпоследовательность $\{p_{(n)'}\}$ первоначальной последовательности $\{p_n\}$ определяется при помощи диагонального процесса

$$p_{(n)'} = p_{n^{(n)}};$$

она, очевидно, удовлетворяет условию $\lim\limits_{n, m \to \infty} d(p_{(n)'}, p_{(m)'}) = 0$. Поэтому, учитывая полноту множества M^a, можно утверждать, что существует точка $p \in M^a$, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} d(p_{(n)'}, p) = 0.$$

Теперь мы покажем, что множество M^a бикомпактно. Заметим, что существует счетное семейство $\{F\}$ открытых множеств F пространства X, обладающее следующим свойством: для любого открытого множества U пространства X и всякой точки $x \in U \cap M^a$

найдется множество $F \in \{F\}$, такое, что $x \in F \subseteq U$. Это утверждение можно доказать следующим образом. При любом заданном $\varepsilon > 0$ множество M^a, поскольку оно вполне ограничено, можно покрыть конечной системой открытых шаров радиуса ε с центрами, принадлежащими M^a. Полагая последовательно $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ и рассматривая счетное семейство соответствующих конечных систем открытых шаров, мы и получим требуемое семейство $\{F\}$ открытых множеств.

Пусть $\{U\}$ — любая система открытых множеств, покрывающая M^a. Через $\{F^*\}$ мы обозначим подсемейство семейства $\{F\}$, определенное следующим условием: $F \in \{F^*\}$ в том и только в том случае, когда $F \in \{F\}$ и существует множество $U \in \{U\}$, такое, что $F \subseteq U$. Из этого свойства семейства $\{F^*\}$ и того факта, что система $\{U\}$ покрывает множество M^a, мы можем заключить, что счетное семейство открытых множеств $\{F^*\}$ покрывает M^a. Построим теперь подсистему $\{U^*\}$ системы $\{U\}$, а именно выберем для каждого из множеств $F \in \{F^*\}$ ровно по одному множеству $U^* \in \{U\}$, такому, что $F \subseteq U^*$. Тогда $\{U^*\}$ — счетное семейство открытых множеств, покрывающее M^a. Мы должны показать, что некоторая конечная подсистема системы $\{U^*\}$ покрывает множество M^a. Пусть множества семейства $\{U^*\}$ занумерованы в последовательность $U_1, U_2, \ldots$. Допустим, что ни при каком значении n конечное объединение $\bigcup_{j=1}^{n} U_j$ не покрывает множество M^a. В таком случае при каждом n должна существовать точка $x_n \in \left(M - \bigcup_{k=1}^{n} U_k\right)$. Как было показано выше, последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{(n)'}\}$, сходящуюся к некоторой точке, скажем x_∞, множества M^a. Тогда $x_\infty \in U_N$ при некотором N, и поэтому $x_n \in U_N$ для бесконечного числа значений n и, в частности, для некоторого $n > N$. Но это противоречит тому, что по построению $x_n \in \left(M - \bigcup_{k=1}^{n} U_k\right)$. Итак, мы доказали, что множество M^a бикомпактно.

3. *Пространства с мерой*

Меры

Определение. Пусть S — некоторое множество. Пара вида $(S, \mathfrak{B})$ называется *σ-алгеброй*[1]) или *σ-аддитивным семейством* подмножеств множества S, если $\mathfrak{B}$ — семейство подмножеств множества S,

[1]) Говорят также „σ-кольцо“ или „σ-поле“. — *Прим. перев.*